UNIVERSIDAD DE GRANADA

Facultad de Ciencias de la Educación

Departamento de Didáctica de la Matemática

TRABAJO FIN DE MÁSTER

ESTUDIO COMPARATIVO DE MANUALES UNIVERSITARIOS DE CÁLCULO SOBRE EL CÁLCULO INTEGRAL

JOSÉ SERRANO PUERTO

Granada

Septiembre, 2017

UNIVERSIDAD
DE GRANADA

Curso 2016/2017

Trabajo Fin de Máster realizado bajo la tutela del doctor D. Juan Francisco Ruiz Hidalgo y del doctor D. José Antonio Fernández Plaza del departamento de Didáctica de la Matemática de la Universidad de Granada y que presenta José Serrano Puerto dentro del Máster Universitario en Didáctica de la Matemática.

Fdo.: José Serrano Puerto

Vº Bº del tutor

Fdo.: Juan Francisco Ruiz Hidalgo

Vº Bº del tutor

Fdo.: José Antonio Fernández Plaza

RESUMEN

En este estudio se realiza una investigación en la que se comparan contenidos relacionados con el cálculo integral de dos textos de cálculo mediante una metodología basada en el análisis textual y utilizando la técnica del análisis de contenido. Para dicho análisis se establecen categorías que permiten organizar el contenido y concluir que los significados de muchos conceptos manifestados y la presentación de estos son muy diferentes en cada uno de los textos.

ABSTRACT

In this study a research is carried out comparing contents related to the Integral Calculus of two Calculus texts using a methodology based on textual analysis and using the technique of content analysis. For this analysis, categories are established that allow to organize the content and to conclude that the meanings of many concepts manifested and the presentation of these are very different in each one of the texts.

ÍNDICE

ÍNDICE DE FIGURAS

ÍNDICE DE TABLAS

1. Introducción

El cálculo integral es un tópico central en las matemáticas universitarias de muchas carreras científicas. Esto se ve reflejado en las pruebas de acceso a la universidad, en las que se plantean problemas o situaciones en las que se deben realizar integrales. Ahora bien, esta se presenta de diferentes formas a los alumnos, y estos adquieren diferentes significados personales del concepto de integral definida. Esto, junto a mi interés en el cálculo y en indagar sobre los modos en los que se presenta este, son los causantes de la elección de este tema.

En el marco de la educación matemática el análisis de libros de textos es un elemento muy importante. Pues según (Choppin, 1980) el libro de texto es

> a la vez apoyo del saber en tanto que impone una distribución y una jerarquía de los conocimientos y contribuye a forjar los andamios intelectuales tanto de alumnos como de profesores; es instrumento de poder, dado que contribuye a la uniformización lingüística de la disciplina, a la nivelación cultural y a la propagación de las ideas dominantes. (citado por González y Sierra, 2004, pp. 389-390).

Además, los libros de textos poseen una mayor influencia incluso que los currículos legislativos para los docentes (Schubring, 1987). Por lo que el análisis de estos resulta fundamental, prueba de ello es la gran cantidad de documentos que existen analizando diferentes contenidos de los libros de textos y de diferentes épocas y niveles. Es más, durante los últimos años ha cobrado especial relevancia en España (Machado, 2009).

Es por todo esto que en la memoria del Trabajo de Fin de Máster que se presenta se realiza un estudio comparativo del cálculo integral en dos de los manuales de cálculo más recomendados en los primeros cursos de las carreras de las universidades andaluzas. Los textos seleccionados han sido los siguientes:

- De Burgos, J. (2007). *Cálculo infinitesimal de una variable* (2ª edición). Madrid, España: McGraw-Hill
- Larson, R. y Edwards, B. (2010). Cálculo 1 de una variable (9ª edición). Madrid, España: McGraw-Hill.

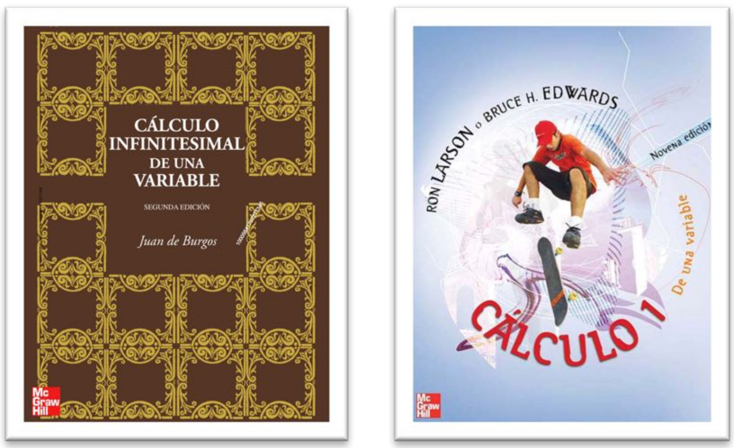


Figura 1.1. Portadas de los manuales analizados

Para comparar estos dos manuales, se ha utilizado el método del análisis textual a través del análisis contenido, por lo que explicaremos en qué consiste. Además, en este es esencial profundizar en la naturaleza de los conceptos matemáticos. Para ello se han clasificado los contenidos en tres categorías diferentes: estructura conceptual, sistemas de representación y sentido y modos de uso. Una vez dicho esto, es importante mencionar que este trabajo está inspirado en el realizado por (Herrera, 2016), en el que se realiza una comparativa de textos universitarios en relación al cálculo diferencial.

Por otro lado, con lo que respecta a los objetivos, el objetivo general del presente trabajo es comparar los significados sobre conceptos relacionados con el cálculo integral manifestados por los dos manuales mencionados. Para ello se han marcado una serie de objetivos específicos:

- Elegir y adaptar un método de análisis que permita extraer y comparar los contenidos relevantes de manera organizada.

- Señalar diferencias y semejanzas en los contenidos y en cómo se presentan en los libros de textos analizados.
- Analizar y comparar la estructura y metodología empleada en los textos analizados.

Para cumplir estos objetivos se ha organizado este trabajo en varios capítulos que se mencionan a continuación.

En el capítulo 2 se muestran, en primer lugar, antecedentes sobre al aprendizaje y la enseñanza del concepto de integral. En segundo lugar, se realiza una revisión de otros trabajos acerca del análisis y comparación de libros de textos de matemáticas. Por último, se presentan los aspectos teóricos en los que se apoya el presente trabajo; estos son el análisis de contenido y los significados de un concepto.

El capítulo 3 está dedicado a describir la metodología empleada. Aquí se describe el análisis comparativo, que es el que se usa en el trabajo. En particular se emplea la vía correspondiente al análisis textual, el cual pretende "describir, evaluar o caracterizar el contenido matemático en su dimensión curricular y metodológica" (Gómez, 2011, p. 53). Así mismo, se presenta el método del análisis de contenido junto con las categorías que lo forman, las cuáles serán usadas para organizar el contenido de los textos. Para finalizar el capítulo, se menciona el modo en el que los textos han sido seleccionados.

En el capítulo 4 se realiza la comparación de aspectos generales de los textos, tales como el modo en qué se introduce la integral, la estructura que posee y la metodología de los textos analizados.

En los siguientes tres capítulos se realiza la comparación de los contenidos relativos a los conceptos de «primitiva», «integral definida» y «Teorema Fundamental del Cálculo». Aquí, como hemos comentado, se organizan los contenidos con base en lo explicado en el capítulo 3 sobre el método del análisis de contenido y sus diferentes categorías.

Para finalizar, en el capítulo 8 se realiza un resumen de los resultados obtenidos en el análisis resalando las diferencias más significativas en términos de las tres categorías establecidas, así como una conclusión de los resultados obtenidos y el logro de los objetivos.

2. MARCO TEÓRICO

En este capítulo se mostrarán algunos antecedentes referentes al aprendizaje y la enseñanza del concepto de integral, así como otros trabajos acerca del análisis y comparación de libros de textos de matemáticas. Además, se presentan los aspectos teóricos en los que se apoya el presente trabajo.

2.1. ANTECEDENTES

Para una fundamentación teórica, se incluirá algunas de las ideas principales de investigaciones relacionadas con el tema de investigación planteado. Para ello se ha realizado una revisión de bibliografía en diferentes bases de datos como «Matheduc», «Funes», «Dialnet» y «Google académico» sobre los antecedentes referentes al tema de investigación propuesto. Mencionaré algunas ideas acerca del aprendizaje y enseñanza del concepto de integral según las investigaciones realizadas por diferentes autores. Para ello dividiremos las investigaciones en diferentes puntos.

2.1.1. Significados de la integral en alumnos universitarios

Para comenzar, Llorens y Santoja (1997) indican que existen diversas concepciones erróneas del concepto de integral definida que muestran los alumnos universitarios basándose para ello en su propia experiencia y en otros estudios realizados:

1. Identifican integral con primitiva, dejando de lado de esta forma los procesos de convergencia o geométricos.

2. Identifican la integral definida con la regla de Barrow, aunque esta no pueda aplicarse.
3. No relacionan el concepto de integral definida con el problema de convergencia, resultándoles difícil de entender que una integral sea divergente.
4. A pesar de que los estudiantes relacionan el área con la integral, la siguen trabajando algebraicamente sin obtener una imagen visual de la integral.

Destacamos a continuación otros estudios sobre el alumnado universitario. Por un lado, partiendo de las concepciones erróneas citadas anteriormente, Milevicich (2008) describe de manera breve las maneras de introducir el concepto de integral por tres de los libros más usados en los cursos de cálculo, para de esta forma poder obtener pistas que ayuden a localizar el origen de los errores. Además, realiza un estudio exploratorio para determinar las ideas previas que poseen los alumnos de primer curso de universidad de ingeniería eléctrica y mecánica sobre el cálculo integral, cuyos resultados reflejan por ejemplo que "las respuestas obtenidas aparecen como representativas de una desconexión profunda entre el concepto de integral y su particular imagen de ese concepto" (Milevicich, 2008, p. 336) o que "se evidencia una ausencia de conexión entre los conceptos de integral definida e indefinida" (Milevicich, 2008, p. 336). En las conclusiones, se expresa la conveniencia de estudiar el origen y evolución de la integral, así como la utilización del ordenador con el objetivo de dar significado a la integral definida.

También es reseñable el trabajo de Aldana y González (2011), en el que se realiza un estudio sobre el desarrollo del esquema conceptual del concepto de integral definida de estudiantes de tercero de Licenciatura de Matemáticas de Colombia. Para ello, se hizo una revisión de diferentes libros de texto que incluyen el concepto de integral definida lo que permitió determinar los elementos matemáticos que configuran este concepto matemático como: el área como aproximación, el área como límite de una suma, la integral definida, las propiedades de la integral definida, y el teorema fundamental y del valor medio, desde los sistemas de representación gráfico, algebraico, y analítico.

2.1.2. Significados de la integral en alumnos no universitarios

En lo respecta a alumnos no universitarios, Rasslan y Tall (2002) realizan un estudio exploratorio en alumnos ingleses de instituto sobre la definición y la imagen del concepto de integral, así como la relación entre ambos, categorizando las respuestas de los estudiantes en cada cuestión. De este estudio se extraen algunas conclusiones como que la mayoría de estudiantes tiene dificultad para interpretar problemas que calculan áreas e integrales definidas en contextos más amplios, tales como integral definida con una discontinuidad infinita o integrales de funciones en las que interviene el valor absoluto o la parte entera.

2.1.3. Ideas y dificultades en el aprendizaje y enseñanza de la integral

Por otro lado, se han realizado otras investigaciones relacionadas con el aprendizaje y la enseñanza del concepto de integral. Varios autores consideran importante que la enseñanza de este concepto sea a través de áreas de superficies. En este sentido, Aranda y Callejo (2015) plantearon un experimento de enseñanza en alumnos de bachillerato dedicado a la construcción del concepto de integral definida partiendo de la idea de aproximación al área de una superficie. El análisis realizado permitió identificar tres perfiles diferentes en dicha compresión. Esta idea también es plasmada por Kouropatov y Dreyfus (2013), quienes proponen construir el concepto de integral sobre la base de la idea de acumulación, haciendo una propuesta para el currículo.

Por otro lado, cabe destacar aquí también el trabajo de Turégano (1997), que realiza una propuesta de enseñanza del concepto de integral. Las líneas básicas de la propuesta son principalmente dos: (a) introducción del concepto de integral como primera iniciación al estudio del cálculo infinitesimal, con independencia del concepto de derivación y previamente al estudio de límites; (b) presentación de dicho concepto como una continuación de la noción de área, utilizando la visualización a través del ordenador para dar significado al concepto.

Relacionado con las dificultades de los alumnos, Orton (1983) detecta que la introducción de los alumnos a la integración se ve oscurecida por la manipulación algebraica. En esta línea, Llorens y Santoja (1997) también hacen referencia a la algebrización, la cual se presenta como un producto acabado lo que dificulta su comprensión, pues es el paso final de un largo proceso llevado a lo largo de la historia. Algunas de las dificultades que presenta el alumnado universitario tienen claramente su origen en la coordinación entre los registros analíticos y gráficos (Souto y Gómez-Chacón, 2011). Es interesante también, fijarse en las dificultades, obstáculos y errores que tienen los alumnos para la comprensión del concepto de integral impropia (González-Martín y Camacho, 2005).

2.1.4. La integral en las PAU

Por último, cabe mencionar también la influencia de las pruebas de acceso a la universidad (PAU) en la enseñanza de la integral definida en bachillerato (Contreras, Ordóñez y Wilhelmi, 2010). En este trabajo se describe los significados institucionales de la integral y se muestra cómo se presenta dicha noción en una serie de libros de texto de bachillerato, además de las diferentes situaciones que aparecen en las pruebas de acceso a la universidad referentes a la integral. Los significados institucionales que se presentan son los siguientes: geométrica, resultado de un proceso de cambio, inversa de la derivada, aproximación al límite, y algebraica. De todas ellas, la geométrica es la que más aparece en las PAU, así como la única que tiene una presencia total en los libros de texto, refiriéndose esta presencia total a la aparición de la concepción geométrica en todas las entidades primarias: situaciones, lenguaje, definiciones, proposiciones, procedimientos y argumentos.

Siguiendo este hilo de significados institucionales, Ordóñez y Contreras (2011) realizan un estudio de los significados personales de los alumnos de bachillerato sobre la integral definida, llegando a la conclusión de que los estudiantes identifican integral con área pero no la diferencian estos conceptos en muchos casos. No establecen conexión entre la noción de área y de integral, considerando esta última como el cálculo de una primitiva y aplicación de la regla de Barrow. Además, los estudiantes tienen un pobre dominio del registro gráfico.

2.2. ESTUDIOS SOBRE ANÁLISIS Y COMPARACIÓN DE LIBROS DE TEXTOS

El análisis de libros de textos es un elemento importante de la educación matemática. Prueba de ello, es la gran cantidad de documentos que existen analizando diferentes contenidos de los libros de textos y de diferentes épocas y niveles. Es más, durante los últimos años ha cobrado especial relevancia en España (Machado, 2009).

En este sentido, Marco-Buzunáriz, Muñoz-Escolano y Oller-Marcén (2016) realizan un estudio analizando los trabajos existentes acerca de las investigaciones sobre libros de textos en las actas de los Simposios de la Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática (SEIEM) desde 1997 a 2015. Dicho estudio revela que el 8,8% de las investigaciones tratan sobre libros de textos, siendo la mayoría de estas sobre análisis de libros de texto y comparación de libros de texto.

Una vez introducido esto, se citarán varios artículos sobre análisis de textos internacionales. Aquí podemos destacar el estudio comparativo de libros de texto de diferentes países realizado por Howson (1995), citado por González y Sierra (2002), distinguiendo además entre estudios a posteriori, uso dado a los libros de textos de diferentes países, contribución al aprendizaje y obstáculos que presenta; y estudios a priori. En esta línea, podemos citar también los trabajos de Erbas, Alacaci y Bulut (2012) y Park y Leung (2006) en los que se realiza un estudio comparativo de textos matemáticos de diferentes países, comparando aspectos tales como el contenido o la apariencia del libro.

A continuación, se citarán algunos estudios históricos de libros de matemáticas. En primer lugar, se mencionarán algunos textos internacionales de especial relevancia. Estos son los estudios de Glaeser (1983) y Schubring (1987) (citados por Machado, 2009), pues en ellos se establecen criterios metodológicos para realizar el análisis históricos de libros de texto.

En lo referente a los textos españoles, existen investigaciones que tratan la evolución de un determinado concepto a lo largo de los años en los libros de texto. En este apartado, podemos destacar las investigaciones sobre la evolución de contenidos relativos a la rama del Análisis Matemático en textos españoles en la enseñanza secundaria durante el siglo

XX (González y Sierra, 2002, 2004; González, Sierra y López, 1999; Sierra, González y López, 2003). En particular, resulta más cercano a este estudio el realizado por González et al. (1999), el cual se muestra análisis de la evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y cursos de orientación universitaria desde 1940 a 1995. Este estudio se divide en tres etapas: en la primera se realizan fichas con los datos fundamentales de cada libro; en la segunda se elaboran tablas comparativas de los textos de cada periodo atendiendo a aspectos tales como el modo de introducción del concepto, el tipo de definición o la secuenciación; y en la última se considera tres dimensiones de análisis (conceptual, didáctico-cognitivo y fenomenológico). De la misma forma, siguiendo estas tres etapas, Sierra et al. (2003) realizan un análisis del concepto de continuidad en los manuales españoles de educación secundaria en la segunda mitad del siglo XX. Además de las citadas, existen otras investigaciones de este tipo sobre otros conceptos de otras ramas matemáticas (Machado, 2009; Sierra, Rico y Gómez, 1997).

Tras esto, nos centraremos en los trabajos realizados sobre manuales orientados a la enseñanza universitaria. En lo referente al cálculo, Bravo y Cantoral (2012) analizaron la integral de línea en diferentes manuales de cálculo universitarios, unos catalogados como formales y otros como actuales. Es relevante mencionar el hecho de que en dicho estudio se analizó una edición del texto de Larson considerado para este trabajo (Larson y Edwards, 2010).

También hay otras investigaciones que estudian el concepto de límite en textos universitarios (Carranza et al., 2006; González-Ruiz, Ruiz-Hidalgo y Molina, 2014; Sánchez y Contreras, 1998). En particular, destacamos el trabajo de González-Ruiz et al. (2014), en el que se estudia la influencia de los conceptos topológicos en la definición de límite en manuales universitarios, entre los que se encuentra el de Larson y Edwards (2010). La comparación de manuales realizada en este trabajo se basa en el análisis de contenido usando las tres dimensiones del significado de un concepto matemático: estructura conceptual, sistemas de representación y fenomenología.

Relativo a la derivada, Herrera, Velasco y Ruiz-Hidalgo (2017) comparan el concepto de derivada y contenidos relativos al cálculo diferencial en dos textos de cálculo universitario, siendo uno de ellos el de Larson y Edwards (2010) empleado en este estudio.

Además, este sigue la metodología del análisis de texto y usa también las técnicas del análisis de contenido.

Por último, se mencionarán estudios realizados sobre la integral. En la tesis de Santos (2012) se dedica unos capítulos al análisis de la integral en dos libros de textos de cálculo usados en el primer curso de la enseñanza universitaria, especialmente en la Licenciatura en Matemáticas. Otro trabajo a tener en cuenta son los realizados por Contreras y Ordóñez (2003) y Contreras et al. (2010), en los que se compara el tratamiento dado a la integral definida en diferentes textos españoles del bachillerato.

2.3. Aspectos teóricos

Para la elaboración de este trabajo se usará el método del análisis didáctico, por lo que explicaremos en qué consiste. En particular, una parte de este, denominada análisis de contenido, en el que es esencial profundizar en la naturaleza de los conceptos matemáticos. Se describirá por tanto también el significado de un concepto matemático.

2.3.1. Análisis didáctico

El análisis didáctico en matemáticas tiene por objetivo "establecer los significados de los conceptos y aprehender la intencionalidad educativa del discurso de las matemáticas escolares" (Rico, 2013, p. 21). Este se trata de un nivel de reflexión del currículo que propone cuatro componentes: el análisis de contenido, el análisis cognitivo, el análisis de instrucción y el análisis de actuación. De estos, los tres primeros se centran en el diseño (análisis a priori) y el cuarto en la puesta en práctica, implementación y la correspondiente evaluación de los resultados (análisis a posteriori) (Lupiáñez, 2013). En primer lugar, el análisis de contenido analiza los significados de los contenidos matemáticos; en segundo lugar, el análisis cognitivo de los contenidos especifica las condiciones para el logro de los aprendizajes; después el análisis de instrucción examina las tareas, recursos y organización necesaria para la enseñanza; y, por último, el análisis de actuación estudia los logros de aprendizaje (Rico, 2016).

En particular, en este trabajo nos centraremos en el análisis de contenido, el cual es un procedimiento en el que se analiza, describe y establece los diferentes significados de un concepto matemático y los procedimientos que lo involucran (P. Gómez, 2007; Lupiáñez, 2013; Rico, 2013). Este análisis se localiza en la dimensión conceptual del currículo y se estructura alrededor de tres organizadores del currículo: estructura conceptual, sistemas de representación y sentido y modos de uso (Fernández-Plaza et al., 2016; Lupiáñez, 2013; Rico, 2016).

2.3.2. Significado de un concepto matemático

El análisis de contenido tiene la finalidad de determinar los significados de los conceptos matemáticos escolares que se están estudiando. La noción de significado está basada en una estructura ternaria propuesta por Frege (1998). Inicialmente propuesta por Rico (2012, 2013), la tripleta semántica propuesta por Frege -referencia, signo, sentido-, se adapta a los conceptos matemáticos escolares en estructura conceptual, sistemas de representación y sentidos (Fernández-Plaza et al., 2016).

- *Estructura conceptual*. Se consideran tres tipos de elementos: los objetos, los conceptos y las estructuras matemáticas. Por lo que analizar los significados matemáticos desde esta perspectiva consiste en identificar y organizar dichos elementos y las relaciones que se establecen. Además, la estructura conceptual aporta criterios de veracidad para las proposiciones que se obtienen de los conceptos.
- *Sistemas de representación*. Están definidos por un conjunto de signos, reglas, notaciones y gráficas que designan y muestran los conceptos y las relaciones existentes entre ellos. Estos, además, relacionan la referencia y el sentido de un concepto.
- *Sentidos*. Incluyen aquellos modos de uso, contextos, fenómenos, situaciones y problemas que están en el origen del concepto y lo dotan de carácter funcional (Ruiz-Hidalgo, 2016).

3. METODOLOGÍA

En este capítulo se describirá el procedimiento que se ha seguido para realizar este estudio. Para ello se usa el análisis comparativo, y en particular se emplea la vía correspondiente al análisis textual. Así mismo, se presenta el método del análisis de contenido junto con las categorías que lo forman, las cuáles serán usadas para organizar el contenido de los textos. Para finalizar el capítulo, se menciona el modo en el que los textos han sido seleccionados.

3.1. TIPO DE ESTUDIO

En este estudio se analizará dos textos de cálculo del primer curso de universidad. Este se trata de un tipo de estudio descriptivo y cualitativo (León y Montero, 2003), pues en este trabajo se recolectan datos de los libros de textos que los describe, mediante la observación y análisis de estos a través de elementos textuales.

León y Montero (2003) realizan la siguiente descripción del análisis cualitativo de datos:

> El adjetivo «cualitativo» calificando el análisis de los datos suele hacer referencia –aunque no siempre– al hecho de que se utiliza el lenguaje como modo de representación y procesamiento de la información recabada en la investigación sin asignar números a los elementos que la configuran. (p. 170).

En cuanto a la definición de estudio descriptivo, Hernández, Fernández y Baptista (2014) expresan lo siguiente:

> Con los estudios descriptivos se busca especificar las propiedades, las características y los perfiles de personas, grupos, comunidades, procesos, objetos o cualquier otro fenómeno que se someta a un análisis. (p. 92).

3.2. ANÁLISIS COMPARATIVO

Para el análisis de libros de texto se usará el análisis comparativo. Dicho análisis es una herramienta eficiente que nos permite observar la difusión de las nuevas ideas. Además, es útil también para medir aspectos relacionados con la práctica docente. Antes de proceder con este análisis comparativo, conviene citar una serie de tareas previas al estudio, estas son: definición de la finalidad de comparación; historia de la disciplina; contexto histórico; elaboración de inventario de obras de la disciplina; selección de textos a comparar; y selección de contenidos a comparar (Ibánez y Llombart, 2001). Una vez seleccionados los textos y contenidos, se procede a su evaluación, en este sentido resulta importante considerar tanto su contenido científico como otros aspectos relativos a la docencia. De esta forma, se diferencian tres fases: (a) Aspectos generales; (b) comparación de contenidos concretos; y (c) adecuación de los textos a la docencia (Ibánez y Llombart, 2001).

En este estudio, con respecto a las fases previas, nos centraremos tan solo en las que implican la elaboración del inventario y la selección de textos y contenidos a comparar. Esto se debe a que los textos seleccionados son actuales, careciendo de sentido las otras tareas previas y quedando fuera del alcance de este trabajo. Estas tareas previas se realizarán al final de este capítulo.

Con respecto al análisis comparativo, en este estudio se realizarán las dos primeras fases. En primer lugar, los aspectos generales de las obras, los cuales nos centraremos en los factores internos tales como la estructura de los contenidos, las recomendaciones de lecturas complementarias, las ayudas o los ejemplos empleados. En segundo lugar, la comparación de contenidos concretos, el cual describiremos en el siguiente apartado.

3.3. Análisis textual

La comparación de contenidos se puede realizar a través de dos vías principales: el análisis textual y el análisis epistemológico. En el primero de ellos, que es el que se realizará en este estudio, se pretende "describir, evaluar o caracterizar el contenido matemático en su dimensión curricular y metodológica" (Gómez, 2011, p. 53). El segundo tiene objetivos relacionados con la configuración de las matemáticas escolares a lo largo de la historia (Gómez, 2011), por lo que no se realizará en este estudio.

En lo referente al análisis textual no existe un marco teórico común que este aceptado por toda la comunidad científica para analizar los manuales. A pesar de esto, hay ciertas concordancias en diferentes estudios acerca de que elementos comparar, estos pueden ser: definiciones, teoremas, pruebas, ejemplos, signos y convenciones, algoritmos y reglas, etc. Además, también hay otros aspectos, como los objetivos, secuenciaciones, directrices, etc. que precisan la presentación del contenido matemático (Gómez, 2011).

3.4. Análisis de contenido

El análisis didáctico de un contenido matemático escolar se trata de un método para escudriñar, estructurar e interpretar los contenidos didácticos matemáticos y cuyo objetivo reside en su planificación, su implementación en el aula y su evaluación (Rico, 2016).

Sobre la técnica de análisis de contenido, (Cohen, Manion y Morrison, 2011) señalan que:

> El término análisis de contenido indica el proceso de recogida y resumen de datos escritos, los contenidos principales de dichos datos y sus mensajes. De modo más preciso, define un conjunto de procedimientos estricto y sistemático para el análisis riguroso, el examen y verificación de los contenidos de datos escritos. (p. 563).

En lo referente a la educación matemática, el análisis de contenido se ha empleado como un método para estudiar y determinar tanto la diversidad de significados escolares de los conceptos como los diferentes procedimientos matemáticos que aparecen en un texto (Rico y Fernández-Cano, 2013).

Ahora bien, para analizar el contenido matemático escolar de los textos se establecen tres categorías diferentes que organizan el currículo (Lupiáñez, 2013; Rico y Fernández-Cano, 2013) y que se corresponden con las componentes de significado de un concepto matemático descritas en el capítulo anterior. A continuación, en el siguiente apartado, se describirán estas categorías que se analizarán en este estudio.

3.5. Sistema de categorías

Basándonos en el análisis de contenido descrito anteriormente, se considerarán tres categorías diferentes para analizar los textos. En primer lugar, la revisión y organización de los contenidos que estructura el tema de estudio; en segundo lugar, la manera en que dichos conceptos y procedimientos pueden representarse; y, por último, los sentidos y modos de uso que pueden tener dichos conceptos.

3.5.1. Estructura conceptual

Para llevar a cabo esta parte del análisis se ha considerado el punto de vista cognitivo que organiza el conocimiento matemático en dos ámbitos diferentes: conceptual y procedimental (Hiebert y Lefevre, 1986; citado en Rico, 1997). De cada uno de los ámbitos diferentes se distinguirán tres niveles de complejidad, por lo que en total hay seis categorías: hechos, destrezas y emociones; conceptos, razonamientos y normas (Fernández-Plaza, 2016).

En este estudio, se realizará un análisis de estos dos ámbitos para cada uno de los contenidos. En primer lugar, se realizará una descripción y comparación de los tres niveles de conceptos de cada contenido a estudiar. En segundo lugar, se observará y describirá los tres niveles de la parte procedimental.

Tabla 3.1
Sistema de categorías para el contenido matemático

	Ámbitos	
Niveles	Conceptual	Procedimental
Primer nivel	Hechos	Destrezas
Segundo nivel	Conceptos	Razonamientos

Tabla 3.1
Sistema de categorías para el contenido matemático

	Ámbitos	
Niveles	Conceptual	Procedimental
Tercer nivel	Estructuras conceptuales	Estrategias

Nota. Fuente: (Fernández-Plaza, 2016, p. 105).

3.5.1.1. Campo conceptual

En primer lugar, se presentará la definición del conocimiento conceptual realizada por Hiebert y Lefevre (1986):

> El conocimiento conceptual se caracteriza más claramente como el conocimiento que es rico en relaciones. Puede ser pensado como una red conectada de conocimiento, una red en la que las relaciones de enlace son tan prominentes como las piezas discretas de información. Las relaciones impregnan los hechos y las proposiciones individuales de modo que todas las piezas de información se relacionen con alguna red. (pp. 3-4).

Es decir, los conceptos son las ideas con las que pensamos; relacionan y organizan hechos. El hecho de considerar tres niveles se debe a que estos hechos pueden formar estructuras conceptuales relacionándose. Por lo que aquí vamos a distinguir entre hechos, conceptos y estructuras (Fernández-Plaza, 2016).

Hechos. Los hechos son unidades de información y sirven como registros de acontecimiento. Estos forman el nivel básico del ámbito conceptual, el cual precisamos para analizar un contenido matemático. Aquí se pueden distinguir cuatro aspectos: términos, notaciones, convenios y resultados (Rico, 1997). Se definirá a continuación, basándonos en lo expresado por Fernández-Plaza (2016) y Rico (1997), cada uno de ellos:

- *Términos*: son las palabras que se utilizan para denominar los objetos, nociones, relaciones y operaciones de un tema matemático.
- *Notaciones*: constituyen los símbolos mediante los cuales se presentan los conceptos del tema y se expresan sus propiedades, relaciones y operaciones.

- *Convenios*: son acuerdos tomados, explícita o implícitamente, de uso frecuente.
- *Resultados*: son aquellas inferencias básicas que se deducen de los hechos conceptuales anteriores.

Conceptos. Los conceptos describen una relación o regularidad entre un grupo de hechos y se ubican en el segundo nivel de complejidad. Los conceptos establecen una clase o conjunto de estudio (Fernández-Plaza, 2016; Rico, 1997).

Estructuras. En el último nivel de complejidad se ubican las estructuras matemáticas, que son aquellas que se originan a partir de los conceptos, de las transformaciones y relaciones entre ellos y de las operaciones y propiedades asociadas a estos (Fernández-Plaza, 2016).

3.5.1.2. Campo procedimental

En primer lugar, al igual que antes, se expondrá qué es el conocimiento procedimental según Hiebert y Lefevre (1986):

> El conocimiento procedimental consiste en algoritmos, o reglas, para completar tareas matemáticas. Son instrucciones paso a paso que le indican cómo completar las tareas. Una característica clave de los procedimientos es que se ejecutan en una secuencia lineal predeterminada. Es la naturaleza claramente secuencial de los procedimientos lo que probablemente les diferencia de otras formas de conocimiento. (p. 6).

Esto es, los procedimientos son las diferentes maneras de ejecución de una tarea matemática (Rico, 1997). En este campo se consideran las operaciones, propiedades y métodos matemáticos, sus modos de procesamiento y el conocimiento que sostiene. Al igual que en el campo conceptual, se van a distinguir tres niveles relacionados con los anteriores: las destrezas, que procesan hechos, los razonamientos, que procesan conceptos, y las estrategias, que procesan estructuras (Fernández-Plaza, 2016).

Destrezas. Las destrezas consisten en el procedimiento secuenciado de contenidos básicos, a través del uso de convenios y la manipulación de las notaciones relacionadas. En este apartado se analizará las reglas, operaciones y algoritmos relacionados con el contenido en cuestión (Fernández-Plaza, 2016).

Razonamientos. Los razonamientos involucran el procesamiento de relaciones e inferencias lógicas entre conceptos (Rico, 1997). Hay cuatro tipos diferentes de razonamientos: lógico-deductivo, inductivo, analógico y figurativo (Fernández-Plaza, 2016). Aquí se observará las demostraciones que se realizan y cuáles no y el orden en el que estas se muestran.

Estrategias. Las estrategias involucran el procesamiento de conceptos y la conexión de razonamientos, vinculados con una o varias estructuras para responder a una cuestión o problema (Fernández-Plaza, 2016). Es decir, en este punto se estudiarán los pasos o métodos que se ofrecen al estudiante para resolver un determinado problema.

3.5.2. Sistemas de representación

Las representaciones matemáticas son todas aquellas herramientas (signos o gráficos) que muestran los conceptos y procedimientos matemáticos y las cuales permiten que se pueda interactuar con el conocimiento matemático, es decir, registran y transmiten su conocimiento sobre las matemáticas. Su interés didáctico proviene del hecho que las personas asignan significados y comprenden las estructuras matemáticas a través del trabajo con las diferentes representaciones (Radford, 1998; citado en Rico, 2009).

Ahora bien, estas representaciones pueden estructurarse, según sus características y propiedades, en distintos sistemas de representación. Cada uno de estos sistemas forma su propio conjunto de notaciones, símbolos y gráficos y posee unas determinadas reglas y convenios. Por lo que los sistemas de representación pueden clasificarse en dos grandes grupos (Lupiáñez, 2016; Rico, 2009):

- *Las representaciones simbólicas*: son aquellas que incluyen símbolos alfanuméricos que se emplean con ciertas reglas de procedimiento.
- *Las representaciones gráficas*: son aquellas de tipo figurativo, poseen también unas reglas de composición y convenios de interpretación.

Además, según el concepto del que se trate, aparecen otros sistemas de representación a partir de estos dos.

También, las representaciones matemáticas se pueden manipular, procesar, operar y convertir, mostrando de esta manera una gran variedad de propiedades y relaciones estructurales de los conceptos matemáticos. Se van a clasificar estas acciones en dos grupos principales (Lupiáñez, 2016):

- *Procesamientos de un sistema*: son transformaciones de las representaciones en el mismo sistema donde fueron creadas.
- *Conversiones entre sistemas*: son traducciones de una determinada expresión realizada en un cierto sistema, a la expresión de esa misma noción en otro sistema diferente.

Varios autores han señalado que se precisa utilizar diversas representaciones para poder captar la estructura de un concepto con toda su riqueza y complejidad. También, resulta necesario traducir de un tipo de representación a otro los conceptos matemáticos para poder asegurar la comprensión y el aprendizaje de dichas nociones (Lupiáñez, 2016).

En este trabajo se analizarán los sistemas de representación utilizados en cada manual para cada concepto matemático. Además, será interesante fijarse en los procesamientos de un sistema y las conversiones entre sistemas en los mismos.

3.5.3. Sentido y modos de uso de un concepto

En este apartado se considerarán dos vías para identificar el sentido de un concepto matemático. Por un lado, considerando los conceptos como acciones que organizan fenómenos; y, por otro lado, destacando los usos y aplicaciones técnicas de las matemáticas para resolver problemas de la vida real y de las ciencias (Rico, Flores y Ruiz-Hidalgo, 2015; Ruiz-Hidalgo, 2016).

Se observarán y analizarán los siguientes aspectos relativos al sentido de los conceptos matemáticos basándonos en lo expuesto por Puig (1997), Rico (2009) y Ruiz-Hidalgo (2016):

- *Términos y modos de uso cotidianos*: pueden provenir de un origen matemático o pertenecer al vocabulario cotidiano. En este último caso está condicionado del uso cotidiano del estudiante de dicho concepto.

- *Contextos matemáticos*: son descripciones de cómo los conceptos y estructuras matemáticas atienden y responden, como instrumentos de conocimiento, a unas necesidades intelectuales o prácticas determinadas.
- *Fenómenos*: otro método consiste en identificar los fenómenos de los que tal concepto o estructura surge y a los que organiza. Estos están relacionados con el análisis propuesto por Freudenthal, quien establece que "los fenómenos para los que tal concepto o estructura es un medio de organización". Dicha propuesta, tiene diferentes tipos de fenomenología: fenomenología, fenomenología didáctica, fenomenología genética y fenomenología histórica. En el primer caso, trata de analizar el modo en que se han organizado el concepto para detectar los usos actuales. En el caso didáctico, se encuentra los fenómenos propuestos en las secuencias de enseñanza, aquellos presentes en el mundo del alumno. En el caso genético, intervienen aquellos fenómenos originados por el desarrollo cognitivo de los estudiantes. En el último caso, trata de identificar los problemas que dieron origen a un concepto a lo largo de la historia.
- *Situaciones*: son aquellos ámbitos del mundo del estudiante en la cual se sitúa la tarea. Aportan sentido a los contenidos matemáticos en los libros de texto en que aparecen, identificando ámbitos de actividad y usos del concepto. El marco de estudio PISA considera cuatro tipos de situaciones para analizar, las cuales son situaciones personales, laborales, sociales y científicas.

3.6. DESCRIPCIÓN DE LA MUESTRA Y SELECCIÓN DE TEXTOS

Antes de comenzar con el análisis se va a describir el proceso realizado para la selección de los libros de texto. Para ello, en primer lugar, se han seleccionado las siguientes titulaciones de las universidades andaluzas: Grado en Matemáticas, Grado en Física, Grado en Ingeniería Industrial, Grado en Ingeniería Informática y Grado en Ingeniería Química. Una vez seleccionadas estas titulaciones, se han recopilado las guías docentes de las asignaturas de primer curso en las que aparecía el cálculo integral de una variable, con el fin de estudiar la bibliografía recomendada en dichas guías docentes.

Una vez recopiladas todas las guías docentes, se procedió a realizar una tabla de frecuencias de los textos que aparecen en la bibliografía recomendada. Para ello, se clasificaron los textos por su título, su autor y la editorial, y se obviaron la diferencia de edición y año para realizar el recuento. Además, cabe mencionar que se ha tenido en cuenta si el texto aparecía en la bibliografía básica o en la complementaria, otorgándole a aquellos que apareciesen en la primera el doble de valor para el recuento que aquellos que apareciesen en la segunda.

A continuación, mostraremos en la Tabla 3.2 los textos más frecuentes en el análisis realizado sobre las guías docentes de las titulaciones mencionadas de las universidades andaluzas.

Tabla 3.2
Tabla de frecuencia de aparición de los textos en las guías docentes. Casos más frecuentes

Autor	Título	Frecuencia
Larson, R. y Edwards, B. H.	Cálculo 1 de una variable	30
De Burgos, J.	Cálculo Infinitesimal de una Variable	22
García, A., García, F., Gutiérrez, A., López, A., Rodríguez, G. y de la Villa, A.	Cálculo I: Teoría y problemas de Análisis Matemático en una variable	17
Bradley, G. y Smith, K.	Cálculo de una variable	17
Tomeo, V., Uña, I. y San Martín, J.	Problemas resueltos de Cálculo en una variable	14
Ayres, F. y Mendelson, E.	Cálculo diferencial e integral	11
Stewart, J.	Cálculo diferencial e integral	10
Spivak, M.	Calculus	10
Apostol, T. M.	Calculus	10

Como se puede observar los textos que más aparecen son “Cálculo 1 de una variable” de Larson y Edwards (2010), y “Cálculo Infinitesimal de una Variable” de Burgos (2007), por lo que son los dos textos que se han elegido para el análisis. Cabe mencionar que el texto de Larson y Edwards (2010) no aparece en ninguna bibliografía de las guías docente de la titulación del Grado en Matemáticas, mientras que el texto de Burgos (2007) sí lo hace en tres de las cinco que hay en Andalucía, estando en dos de ellas en la bibliografía básica.

Una vez elegidos los textos, se va a mencionar a continuación los contenidos que se analizarán de ellos. Bernad (1976) afirma que "es innecesario recorrer todos y cada uno de los capítulos o unidades didácticas de que consta cada texto, para formarse una idea cabal del mismo" (p. 51). Por lo que aquí se analizarán los siguientes contenidos relativos al cálculo integral, dividiéndolo en tres secciones:

- *El concepto de primitiva*: introducción, definición, notación, integral indefinida y reglas básicas de integración.
- *El concepto de integral definida*: introducción, interpretación, definición, áreas, sumas superiores e inferiores, suma de Riemann, integrabilidad y propiedades.
- *El Teorema Fundamental del Cálculo*: introducción, enunciado y demostración de los teoremas fundamentales del cálculo y de la regla de Barrow.

4. COMPARACIÓN DE ASPECTOS GENERALES

En primer lugar, se van a comparar aspectos generales de los textos, los cuáles son los siguientes: el modo de introducción el capítulo del cálculo integral, su estructura y la metodología que se emplea en cada uno de los textos.

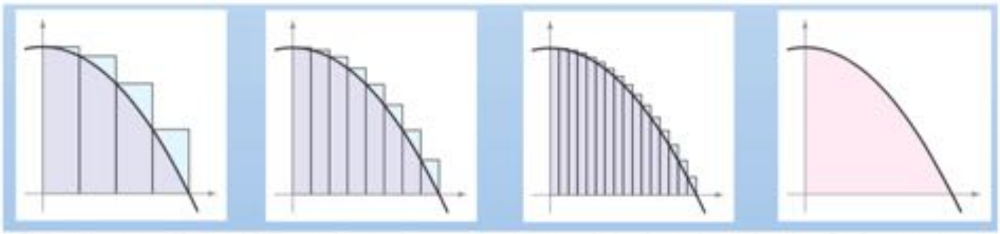
4.1. INTRODUCCIÓN DEL CAPÍTULO DEL CÁLCULO INTEGRAL

La introducción que Larson y Edwards (2010) realiza del capítulo de la integral es la siguiente:

> En este capítulo, se estudiará un importante proceso de cálculo que está estrechamente relacionado con la diferenciación-integración. El lector aprenderá nuevos métodos y reglas para resolver integrales definidas e indefinidas, incluido el teorema fundamental del cálculo. Posteriormente se aplicarán esas reglas para encontrar algunos términos como la función posición para un objeto y el valor promedio de una función. (p. 247).

Nótese que Larson y Edwards (2010) introduce la integral como un cálculo relacionado con la diferenciación, así como la necesidad de aprender una serie de métodos y reglas para resolver integrales, dejando de lado el problema del área.

Aunque es cierto que tras esto se muestra lo que se aprenderá en el capítulo en cada apartado, y en el correspondiente al apartado del área se muestra lo que se tratará en él (véase la Figura 4.1).



El área de una región parabólica puede aproximarse como la suma de las áreas de rectángulos. Conforme se incrementa el número de rectángulos, la aproximación tiende a ser cada vez más exacta. En la sección 4.2, el lector aprenderá cómo se puede usar el proceso de límite para encontrar áreas de una variedad de ancho de regiones.

Figura 4.1. Cálculo del área bajo una curva (Larson y Edwards, 2010, p. 247)

Además de esto, también se incluye un ejemplo de un problema de la vida real que contiene el capítulo.

Por otro lado, Burgos (2007) realiza la siguiente introducción del capítulo:

> Bien mirado, detrás de cuanto se dice aquí, en este capítulo, está el llamado «problema del área», es decir, viene todo ello a cuento de cómo dar con el área de una figura plana, indagando al tiempo si tal área existe. (p. 282).

A diferencia de Larson y Edwards (2010), Burgos (2007) comienza introduciendo el capítulo con el problema del área, dando de esta forma sentido a la integral a través del área. A continuación, se trata el problema del área, para ello se mencionan las reglas que gobiernan el proceso de atribuir área a los conjuntos, esto son los axiomas.

Finalmente, se señala que no se tratará el problema del área en general, sino unos casos particulares de figuras correspondientes a «regiones situadas bajo curvas». Con respecto a esto, se menciona como se pueden aproximar estas figuras mediante rectángulos (desde dentro y desde fuera) haciendo la anchura de los rectángulos cada vez más pequeñas, de forma que el número de rectángulos tenderá a infinito.

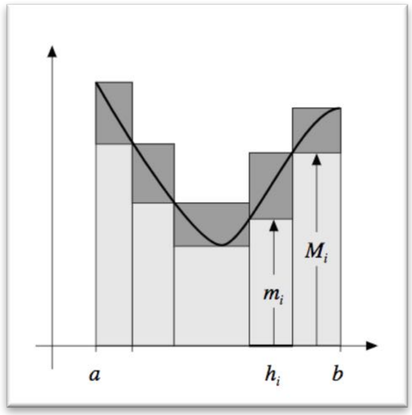


Figura 4.2. Cálculo del área bajo una curva (Burgos, 2007, p. 283)

Podemos observar como las introducciones de ambos libros son bastante diferentes, aunque también tienen algo en común, esto es que se presenta el cálculo del área bajo una curva mediante una aproximación a través de la suma de rectángulos. A pesar de este punto común, se presentan ciertas diferencias respecto a esto. Por un lado, Larson y Edwards (2010) usa varias representaciones gráficas para explicar el proceso de aproximación de las sumas de áreas de rectángulos al área bajo la curva. Por otro lado, Burgos (2007) tan solo muestra una representación gráfica, explicando con palabras de manera más rigurosa dicho proceso de aproximación.

4.2. ESTRUCTURA

La estructura de los textos de Larson y Edwards (2010) y Burgos (2007) son muy diferentes en lo a la integral se refiere, tanto en el orden como en la disposición. Cabe destacar que en Larson y Edwards (2010) el capítulo se llama «Integración», mientras que en Burgos (2007) el capítulo se llama «Integrales».

Tabla 4.1
Estructura del capítulo del cálculo integral en cada texto

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
1. Antiderivadas o primitivas e integración indefinida.	1. Funciones integrable Riemann. 2. Propiedades de la integral.

Tabla 4.1

Estructura del capítulo del cálculo integral en cada texto

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
2. Área.	3. El teorema fundamental del cálculo.
3. Sumas de Riemann e integrales definidas.	4. Búsqueda de primitivas
4. El teorema fundamental del cálculo. (proyecto de trabajo: demostración TFC)	5. La integral como límite de sumas
5. Integral por sustitución	6. Integración numérica aproximada.
6. Integración numérica	7. Integrales impropias.
	8. Aplicaciones geométricas de la integral.

Podemos observar como Larson y Edwards (2010) comienza el capítulo con las primitivas o antiderivadas (esto es la integración indefinida) mientras que Burgos deja este apartado al punto 4, mostrando primero las funciones integrables Riemann. Esto tiene especial importancia en cómo va a ser introducida la integral en un libro u otro. Larson y Edwards (2010) prefiere que se presenten primero los métodos o reglas para hallar primitivas para después tratar el problema del área, así como la teoría relativa a las integrales definidas. Por otro lado, Burgos (2007) presenta primero que son las funciones integrables Riemann, sus propiedades y el teorema fundamental del cálculo, aunque cabe destacar que las aplicaciones geométricas se dejan para el final del capítulo.

El resto de apartados se dedican a la integración por sustitución y la integración numérica en Larson y Edwards (2010), y a la integral como límite de sumas, la integración numérica y las integrales impropias en Burgos (2007). Hay una pequeña diferencia, ya que en Burgos (2007) se dedica un apartado a una nueva definición de integral como el límite de sumas.

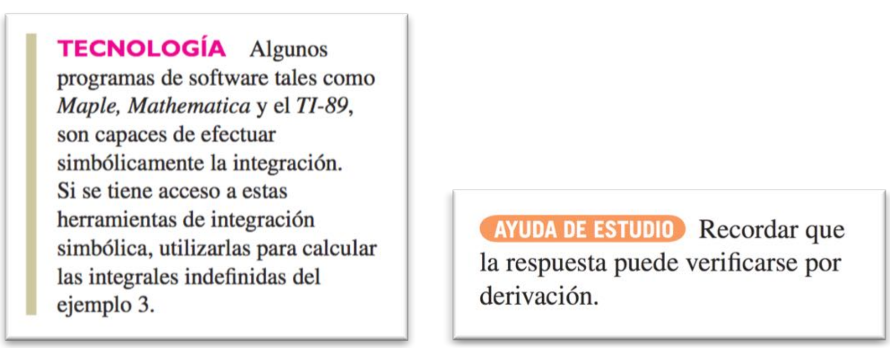
Hay que tener en cuenta también, que Larson y Edwards (2010) dedica otros capítulos a otros contenidos relativos a la integral: las aplicaciones de la integral; las técnicas de integración e integrales impropias; y la integración de algunas funciones como logaritmos, exponenciales, etc.

4.3. METODOLOGÍA

En el aspecto metodológico, Larson y Edwards (2010) incorporan gran cantidad de herramientas metodológicas y presentan los contenidos de manera vistosa, mientras que Burgos (2007) no hace referencias a herramientas metodológicas que ayuden a explicar y entender el contenido.

Un aspecto muy importante para la compresión de los contenidos son los ejemplos empleados. Con respecto a esto, a pesar de que Burgos (2007) utiliza algunos ejemplos la cantidad es mucho menor a la empleada por Larson y Edwards (2010). Larson y Edwards (2010), muestran varios ejemplos para todos los contenidos ayudando de esta forma a que el alumno pueda resolver otros problemas o integrales por sí mismo con mayor facilidad. A lo largo de los capítulos 5, 6 y 7 en los que se comparan los contenidos se mostrarán algunos de los ejemplos usados por ambos textos.

Algunas de las herramientas metodológicas empleadas por Larson y Edwards (2010) son: (a) uso complementario de la tecnología para ayudar a la compresión de los conceptos (Figura 4.3); (b) ayudas de estudio que se presentan en el margen del texto como complemento; (c) una gran cantidad de notas aclaratorias y sobre errores que se suelen cometer; (d) empleo de estrategias para ayudar a resolver los problemas.


TECNOLOGÍA Algunos programas de software tales como *Maple, Mathematica* y el *TI-89*, son capaces de efectuar simbólicamente la integración. Si se tiene acceso a estas herramientas de integración simbólica, utilizarlas para calcular las integrales indefinidas del ejemplo 3.

AYUDA DE ESTUDIO Recordar que la respuesta puede verificarse por derivación.

Figura 4.3. Nota sobre el uso de tecnología y ayudas de estudios (Larson y Edwards, 2010, pp. 251-252)

5. COMPARACIÓN SOBRE EL TRATAMIENTO DEL CONCEPTO DE PRIMITIVA

En este capítulo se comparará el concepto de primitiva en ambos textos con base en el análisis de contenido. Los apartados de cada texto a comparar son «Antiderivadas o primitivas e integración indefinida» de Larson y Edwards (2010) y «Búsqueda de primitivas» de Burgos (2007).

5.1. ESTRUCTURA CONCEPTUAL

5.1.1. Términos/Notaciones

En primer lugar, mencionaremos los términos que se usan en cada libro a través de la Tabla 5.1.

Tabla 5.1
Términos de la primitiva en cada texto

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
• Función • Antiderivada • Primitiva • Constante de integración • Solución general • Ecuación diferencial • Integración • Integral indefinida	• Función • Antiderivada • Primitiva • Integral indefinida • Derivada

Tabla 5.1

Términos de la primitiva en cada texto

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
• Derivada	

Las diferencias notables que podemos encontrar en los términos es que Burgos (2007) no menciona que hay que añadir una constante, tan solo lo expresa de manera matemática sumando una C a una primitiva. Las otras ausencias de términos en Burgos (2007) con respecto a Larson y Edwards (2010) se deben a que este último nos muestra las ecuaciones diferenciales en el capítulo.

A continuación, se muestra la Tabla 5.2 con las notaciones usadas para las primitivas en ambos textos.

Tabla 5.2

Notaciones de la primitiva en cada texto

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
$\frac{dy}{dx} = f(x) \Rightarrow dy = f(x)dx \Rightarrow$ $y = \int f(x)dx = F(x) + C.$ Se usa $\frac{d}{dx}[f(x)]$ para expresar la derivada: $\frac{d}{dx}\left[\int f(x)dx\right] = f(x)$	Notación de Leibniz: $\int f(x)dx$ (integral indefinida de f) para designar a una cualquiera de las funciones primitivas de f en I. $\int f(x)dx = F(x) + C.$ Se usa $d[f(x)]$ para expresar la derivada: $d\left[\int f(x)dx\right] = f(x)dx$ Se usa $dF(x)$ en la integral para denotar a $F'(x)dx$.

En ambos libros se usa la notación de Leibniz para expresar las integrales, pero la diferencia entre ambos es que Burgos (2007) señala que se trata de la notación de Leibniz, mientras que Larson y Edwards (2010) la usa sin mencionar nada más. Además, Larson y Edwards (2010) justifica la integral indefinida operando con la notación dx, dy como podemos observar en la Tabla 5.2.

A parte de estas diferencias, la notación usada en ambos textos es similar, como puede observarse en la Tabla 5.2. En ambos se usan las letras minúsculas para expresar las funciones del integrando, mientras que se usan las letras mayúsculas para expresar las primitivas. También se denota a las constantes con una C mayúscula.

Cabe destacar también que en Larson y Edwards (2010) hay un apartado llamado «notación para antiderivadas y primitivas», además de una nota en el margen izquierdo con el significado de la notación usada (véase la Figura 5.1).

NOTA En este texto, la notación $\int f(x)dx = F(x) + C$ significa que F es una antiderivada o primitiva de *f en un intervalo.*

Figura 5.1. Explicación de la notación de una primitiva (Larson y Edwards, 2010, p. 249)

Burgos (2007) también menciona que se va a mostrar la notación que se utiliza tal como puede verse en la Figura 5.2.

PRIMITIVAS E INTEGRAL INDEFINIDA

Antes de comenzar con los métodos de cálculo de primitivas, empecemos recordando los conceptos y definiciones que aquí nos van a interesar, resumiendo anteriores resultados y hablando acerca de la notación que en esto se utiliza.

Figura 5.2. Inciso sobre la notación (Burgos, 2007, p. 325)

5.1.2. Convenios

Al usar ambos textos la notación de Leibniz los convenios tomados de manera implícita son similares en ambos textos. Ahora bien, también se va a considerar como muestran de manera explícita como se lee una determinada expresión, tal como se muestra en la Tabla 5.3.

Tabla 5.3
Convenios de la primitiva empleados en cada texto

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
La expresión $\int f(x)dx$ se lee como la «antiderivada o primitiva de f con respecto a x». A $f(x)$ se le llama «integrando» y la diferencial de dx sirve para identificar a x como la variable de integración.	La expresión $\int f(x)dx$ se lee como la «integral de $f(x)$ diferencial de x» o «integral de $f(x)$». En ella, a $\int$ se le llama símbolo de la integral y se dice que $f(x)$ es el «integrando».

Podemos observar que hay diferencias en cómo se lee la expresión $\int f(x)dx$ según cada texto. En primer lugar, mientras que Larson y Edwards (2010) leen «antiderivada o primitiva de f», Burgos (2007) lee en su lugar «integral de $f(x)$»; y, en segundo lugar, mientras Larson y Edwards (2010) leen dx como «respecto de x», Burgos lee simplemente «diferencial de x». Es decir, Burgos (2007) muestra la lectura de la expresión símbolo por símbolo, mientras que Larson y Edwards (2010) la trata como un conjunto y la expresa con un lenguaje menos formal y más explicativo.

En cuanto a la denominación de $f(x)$ es la misma en ambos. Las últimas diferencias son que Larson y Edwards (2010) señala para qué sirve la diferencial dx, mientras que Burgos (2007) no lo hace; y que Larson y Edwards (2010) no muestra como se le llama a $\int$, mientras que Burgos (2007) sí lo hace.

5.1.3. Resultados

Con respecto a los resultados, relativo al contenido de primitiva no hay muchos, tan solo el teorema de representación de primitivas que se define en cada texto como se muestra a continuación en la Tabla 5.4.

Tabla 5.4
Teorema de representación de primitivas en cada texto

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
Si F es una antiderivada de f en un intervalo I, entonces G es una antiderivada de f en el intervalo I si y sólo si G es de la forma $G(x) = F(x) + C$, para todo x en I, donde C es una constante.	Si F es una primitiva de f, en I, entonces f admite como primitivas a las funciones $G: I \to \mathbb{R}$, $x \mapsto G(x) = F(x) + C$, para cada $C \in \mathbb{R}$, y solo a tales funciones.

Aunque no hay diferencias de contenido en el resultado, puede observarse como la forma de enunciarlo es diferente.

5.1.4. Conceptos

En ambos textos se define en primer lugar la primitiva de una función de la siguiente forma.

Tabla 5.5
Definición de primitiva en cada texto

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
Se dice que una función F es una antiderivada o primitiva de f, en un intervalo I si $F'(x) = f(x)$ para todo x en I.	Se dice que una función $F: I \to \mathbb{R}$ es una primitiva (o antiderivada) de f si F es derivable y $F'(x) = f(x)$ para $x \in I$.

La diferencia más llamativa entre ambos es que en Burgos se pide que F sea derivable mientras que en Larson y Edwards (2010) no, aunque es cierto que en Larson y Edwards (2010) esa condición viene implícita en el hecho de que exista $F'(x)$, por lo que podría omitirse dicha condición. Hay otras diferencias que también merecen señalarse. Por un lado, en Burgos (2007) se especifica que el dominio de F es I, el cual no se señala que sea un intervalo (aunque el uso de la letra I podría interpretarse que sí lo es). Mientras que, por otro lado, en Larson y Edwards (2010) no se especifica el dominio de F, pero define la primitiva en un intervalo I.

A continuación, se muestra la definición de integral indefinida dada por ambos textos.

Tabla 5.6
Definición de integral indefinida en cada texto

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
Se define la integración indefinida de una función como la operación para resolver una ecuación diferencial de la forma $\frac{dy}{dx} = f(x)$. Se define la integral indefinida como sinónimo de antiderivada.	Si f es continua en I, entonces la función $x \mapsto \int_a^x f$ es una primitiva de f en I (donde $a \in I$ es cualquiera), que se llama integral indefinida de f correspondiente al punto a.

La definición de integral indefinida es totalmente diferente entre ambos textos. Por un lado, Larson y Edwards (2010) se define como una operación para resolver una ecuación diferencial, mostrándose así que proviene de la derivada. Además, se señala que dicho término es sinónimo de antiderivada. Por otro lado, Burgos (2007) (en el que se han presentado las integrales definidas anteriormente) define la integral indefinida correspondiente a un punto a de un cierto intervalo como una primitiva concreta de f, $x \mapsto \int_a^x f$. Además, se pide que f sea continua en dicho intervalo.

5.1.5. Destrezas

En este apartado vamos a analizar las integrales inmediatas o reglas básicas de integración que se proponen en cada texto, así el cómo se presentan estas.

En primer lugar, en ambos textos se menciona que estas se obtienen a partir de las reglas de derivación (leyéndolas de derecha a izquierda). La diferencia principal al introducir estas integrales inmediatas es que Burgos señala que las integrales son válidas en aquellos intervalos donde sus integrandos son funciones continuas. A continuación, se mostrará las tablas presentadas en cada texto:

$$\int x^p\,dx = \frac{x^{p+1}}{p+1} + C \quad (p \neq -1) \qquad \int \frac{dx}{x} = L|x| + C$$

$$\int e^x\,dx = e^x + C \qquad \int a^x\,dx = \frac{1}{La}\,a^x + C$$

$$\int \operatorname{sen} x\,dx = -\cos x + C \qquad \int \cos x\,dx = \operatorname{sen} x + C$$

$$\int \frac{dx}{\operatorname{sen}^2 x} = -\operatorname{ctg} x + C \qquad \int \frac{dx}{\cos^2 x} = \operatorname{tg} x + C$$

$$\int \operatorname{Sh} x\,dx = \operatorname{Ch} x + C \qquad \int \operatorname{Ch} x\,dx = \operatorname{Sh} x + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2+a^2} = \frac{1}{a}\operatorname{arc\,tg}\frac{x}{a} + C = -\frac{1}{a}\operatorname{arc\,ctg}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{x^2-a^2} = \frac{1}{2a} L\left|\frac{x-a}{x+a}\right| + C = \begin{cases} -(1/a)\operatorname{Arg\,Th}(x/a) + C, & \text{si } |x/a| < 1 \\ -(1/a)\operatorname{Arg\,Ch}(x/a) + C, & \text{si } (x/a) > 1 \end{cases}$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2-x^2}} = \operatorname{arc\,sen}\frac{x}{a} + C = -\operatorname{arc\,cos}\frac{x}{a} + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{a^2+x^2}} = L\left(x+\sqrt{a^2+x^2}\right) + C = \operatorname{Arg\,Sh}(x/a) + C$$

$$\int \frac{dx}{\sqrt{x^2-a^2}} = \begin{cases} L\left(x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C = \operatorname{Arg\,Ch}(x/a) + C, & \text{si } x>a>0 \\ -L\left(-x+\sqrt{x^2-a^2}\right) + C = -\operatorname{Arg\,Ch}(-x/a) + C, & \text{si } x<-a<0 \end{cases}$$

Figura 5.3. Tabla de integrales inmediatas (Burgos, 2007, p. 327)

Reglas básicas de integración

Fórmula de derivación	*Fórmula de integración*	
$\frac{d}{dx}[C] = 0$	$\int 0\, dx = C$	
$\frac{d}{dx}[kx] = k$	$\int k\, dx = kx + C$	
$\frac{d}{dx}[kf(x)] = kf'(x)$	$\int kf(x)\, dx = k\int f(x)\, dx$	
$\frac{d}{dx}[f(x) \pm g(x)] = f'(x) \pm g'(x)$	$\int [f(x) \pm g(x)]\, dx = \int f(x)\, dx \pm \int g(x)\, dx$	
$\frac{d}{dx}[x^n] = nx^{n-1}$	$\int x^n\, dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} + C, \quad n \quad -1$	Regla de la potencia.
$\frac{d}{dx}[\operatorname{sen} x] = \cos x$	$\int \cos x\, dx = \operatorname{sen} x + C$	
$\frac{d}{dx}[\cos x] = -\operatorname{sen} x$	$\int \operatorname{sen} x\, dx = -\cos x + C$	
$\frac{d}{dx}[\tan x] = \sec^2 x$	$\int \sec^2 x\, dx = \tan x + C$	
$\frac{d}{dx}[\sec x] = \sec x \tan x$	$\int \sec x \tan x\, dx = \sec x + C$	
$\frac{d}{dx}[\cot x] = -\csc^2 x$	$\int \csc^2 x\, dx = -\cot x + C$	
$\frac{d}{dx}[\csc x] = -\csc x \cot x$	$\int \csc x \cot x\, dx = -\csc x + C$	

Figura 5.4. Tabla de reglas de integración (Larson y Edwards, 2010, p. 250)

Como podemos ver en la Figura 5.3 y Figura 5.4, Larson y Edwards (2010) incluyen las propiedades de linealidad de la integral en la tabla de reglas básicas de integración. Además, colocan al lado las reglas de derivación para ayudar al estudiante a comprender mejor la proveniencia de estas nuevas reglas de integración. Sin embargo, no se incluyen algunas integrales inmediatas como $1/x$ ni las exponenciales, esto se debe a que estas funciones son tratadas por Larson y Edwards (2010) en otro capítulo aparte, tanto la derivada como la integral.

Por otro lado, Burgos (2007) si incluye las integrales de estos tipos de funciones mencionados, además de otras que no incluye Larson y Edwards (2010) como son las funciones hiperbólicas y aquellas que dan como resultado de la integral las funciones inversas trigonométricas o inversas hiperbólicas. Podemos observar, por tanto, que la tabla ofrecida por Burgos (2007) es mucho más amplia, con mayor tipo de funciones.

Podemos destacar también que en ambas tablas se usa la x como variable de integración y no se hace uso de la regla de la cadena en el caso de que la variable de la función que queramos integrar sea otra función.

Por último, cabe mencionar que Burgos (2007) relata que la inmediatez de las integrales es relativa, para unas personas serán ciertas integrales inmediatas mientras que para otras no. Es por ello que añade otra gran lista de integrales que podrían considerarse como inmediatas, aunque no tienen relación con las reglas básicas derivadas y algunas de ellas no parecen demasiado simples.

5.1.6. Razonamientos

En este apartado vamos a analizar las demostraciones que se realizan en este apartado. Como hemos visto en el apartado de resultados, tan solo hay un teorema (el de representación de primitivas) en esta sección por lo que tan solo hay una posible prueba. En ambos textos se demuestra dicho teorema, pero en Burgos (2007) la demostración se encuentra en un capítulo anterior (p. 215), junto con el teorema del valor medio.

La demostración se realiza en ambos libros de la misma forma, mediante doble implicación, en un sentido es inmediata y en el otro a través del teorema del valor medio.

5.1.7. Estrategias

Con respecto a las estrategias, Burgos (2007) es bastante pobre en este aspecto, es un libro más lineal y no muestra ningún tipo de estrategia que ayude a resolver las integrales. En este sentido, Larson y Edwards (2010) ofrece una estrategia para ayudar a resolver integrales mediante las reglas básicas de integración (véase la Figura 5.5).

Figura 5.5. Estrategia para resolver integrales (Larson y Edwards, 2010, p. 251)

Como podemos ver en la imagen, se ofrecen una serie de pasos que se deben realizar para resolver una integral de manera adecuada. A partir de la integral original, en primer lugar, se pide que se reescriba dicha integral para que me quede de la misma forma que una de las que aparecen en la tabla de reglas básicas de integración. Tras esto, se puede aplicar las reglas de integración y por último simplificar el resultado. Además, se dan varios ejemplos de cómo proceder para realizar dichos pasos.

EJEMPLO 3 **Reescribir antes de integrar**

	Integral original	*Reescribir*	*Integrar*	*Simplificar*
a)	$\int \frac{1}{x^3}\,dx$	$\int x^{-3}\,dx$	$\frac{x^{-2}}{-2} + C$	$-\frac{1}{2x^2} + C$
b)	$\int \sqrt{x}\,dx$	$\int x^{1/2}\,dx$	$\frac{x^{3/2}}{3/2} + C$	$\frac{2}{3}x^{3/2} + C$
c)	$\int 2 \operatorname{sen} x\,dx$	$2\int \operatorname{sen} x\,dx$	$2(-\cos x) + C$	$-2\cos x + C$

Figura 5.6. Ejemplos de primitivas (Larson y Edwards, 2010, p. 251)

5.2. SISTEMAS DE REPRESENTACIÓN

En ambos textos el sistema de representación que más aparece es el algebraico. Ahora bien, Burgos (2007) prácticamente no emplea procesamientos en dicho sistema, pues los ejemplos escasean. Larson y Edwards (2010), sin embargo, emplea una gran cantidad de procesamientos en dicho sistema, para dar explicación de determinados conceptos y en numerosos ejemplos.

En cuanto al sistema de representación gráfico, Burgos (2007) no expone ninguna gráfica en este epígrafe, mientras que Larson y Edwards (2010) emplea dicho sistema para representar funciones con diferentes condiciones que sirven para resolver una ecuación diferencial o bien para mostrar la forma que tendrían las funciones que resultan de una integral según el valor de la constante.

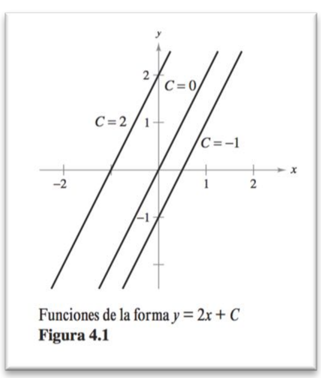


Figura 5.7. Gráfica de soluciones particulares (Larson y Edwards, 2010, p. 249)

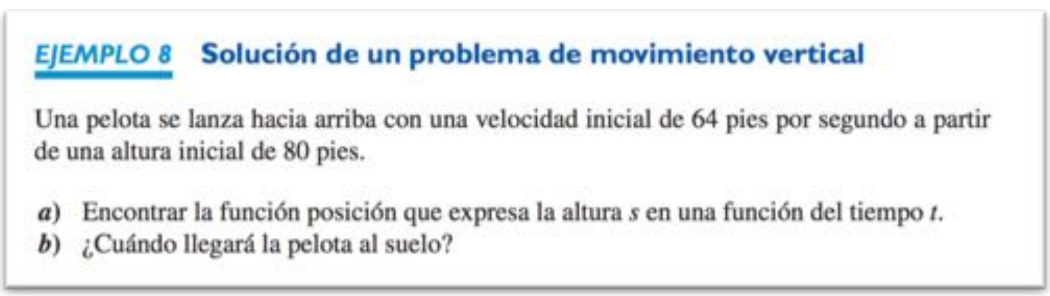
Las conversiones existentes en Larson y Edwards (2010) entre ambos sistemas mencionados son del sistema de representación algebraico al gráfico, tal como vemos en la Figura 5.7.

5.3. Sentidos y modos de uso

En este apartado Larson y Edwards (2010) es el único que ofrece determinadas aplicaciones a los conceptos tratados, pues Burgos (2007) no menciona nada al respecto. Se mostrarán a continuación las aplicaciones que se presentan en Larson y Edwards (2010).

Por un lado, se presenta las condiciones iniciales y soluciones particulares, aquí se muestra cómo calcular una solución particular conociendo un punto por el que pasa la función (condición inicial), esto es, como resolver una ecuación diferencial usando las integrales.

Por otro lado, se muestra una situación real en la que se aplica a través de un ejemplo sobre movimiento vertical, en el que hay que integrar dos veces la aceleración para obtener la altura del objeto (conocidas las condiciones iniciales).


EJEMPLO 8 **Solución de un problema de movimiento vertical**

Una pelota se lanza hacia arriba con una velocidad inicial de 64 pies por segundo a partir de una altura inicial de 80 pies.

a) Encontrar la función posición que expresa la altura s en una función del tiempo t.
b) ¿Cuándo llegará la pelota al suelo?

Figura 5.8. Problema de movimiento vertical (Larson y Edwards, 2010, p. 254)

6. Comparación sobre el tratamiento del concepto de integral definida

Aquí se analizarán diferentes secciones de cada libro del capítulo de integrales mostradas anteriormente en la estructura de los textos. Por un lado, las secciones «Área» y «Sumas de Riemann e integrales definidas» de Larson y Edwards (2010) y, por otro lado, las secciones «Funciones integrable Riemann», «Propiedades de la integral» y «La integral como límite de sumas» de Burgos (2007).

6.1. Estructura conceptual

6.1.1. Términos/Notaciones

En primer lugar, mencionaremos los términos que se usan en cada libro mediante la Tabla 6.1:

Tabla 6.1
Terminología empleada para la integral definida en cada texto analizado

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
• Área • Región • Rectángulo inscrito • Rectángulo circunscrito • Suma inferior y superior	• Área • Partición • Diámetro • Partición posterior • Suma inferior y superior (de Darboux)

Tabla 6.1

Terminología empleada para la integral definida en cada texto analizado

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
• Límite • Máximo y mínimo • Partición • Norma • Subintervalo • Suma de Riemann • Integral definida • Límite superior • Límite inferior • Integrabilidad • Integrable	• Ínfimo y supremo • Máximo y mínimo • Integral inferior y superior • Función integrable • Integrable (según Riemann o R-integrable) • Integrabilidad de Riemann • Integral • Límite inferior y superior de integración • Oscilación • Límite de sumas • Suma de Riemann

Podemos ver importantes diferencias en los términos utilizados en cada texto. En primer lugar, cabe mencionar el empleo de diámetro de una partición en Burgos (2007), mientras que en Larson y Edwards (2010) se emplea el término norma. En segundo lugar, Burgos (2007) especifica que las sumas inferiores y superiores consideradas son de Darboux, mientras que Larson y Edwards (2010) no realiza ninguna apreciación, tan solo dice suma inferior y superior. Por otro lado, también cabe citar que Burgos (2007) expresa «integrabilidad Riemann» e «integrable según Riemann», mientras que Larson y Edwards (2010) hablan de integrabilidad o integrable a secas.

También hay ausencia de términos en un texto con respecto del otro. La primera y la más notoria, es la ausencia de términos como «región» y «rectángulo inscrito y circunscrito» en Burgos (2007), aunque trabaja con estos no hace mención a dichos rectángulos. Es más el término de «área» tan solo aparece en Burgos (2007) en la introducción de la sección, no volviendo a tratar sobre áreas el resto de la sección, mientras que Larson y Edwards (2010) sí emplea con frecuencia los términos citados anteriormente, relacionando la integral con el área.

Se puede destacar también el empleo de ínfimo y supremo por parte de Burgos (2007), mientras que Larson y Edwards (2010) no lo hacen. Esto se debe a que en Larson y Edwards (2010) se trabaja con áreas mayoritariamente, por lo que se supone que la función es continua, luego siempre se alcanza el máximo y el mínimo al tomar una partición.

Por último, cabe destacar que Larson y Edwards (2010) hablan de «integral definida» mientras que Burgos (2007) no menciona dicho término, tan solo hace alusión al término «integral». Por otro lado, Burgos (2007) menciona y define la integral inferior y superior, hecho que no ocurre en Larson y Edwards (2010).

Otros términos que aparecen en Burgos (2007) pero no lo hacen en Larson y Edwards (2010) son el de partición posterior y oscilación.

Tras esto, se muestra en la Tabla 6.2 las notaciones usadas para las integrales definidas en ambos textos:

Tabla 6.2
Notación empleada para la integral definida en cada texto analizado

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
• Uso de la notación sigma para sumas, $\sum_{i=1}^{n}$, donde suele preferirse i, j, k para los índices. • Empleo de Δx para la longitud de los subintervalos de la partición. • $s(n)$ para la suma inferior y $S(n)$ para la suma superior. • $f(m_i)$ valor mínimo y $f(M_i)$ valor máximo de $f(x)$ en el i-ésimo subintervalo. • Δ para particiones y x_i para los puntos de la partición. • $\|\Delta\|$ para la norma de la partición. • Notación similar a integrales indefinidas: $\int_a^b f(x)dx$. • $\lim_{n\to\infty}$ para los límites.	• Uso de la notación sigma para sumas, $\sum_{i=1}^{n}$. • Empleo de Δx_i para la longitud de los subintervalos de la partición. • P para particiones y x_i para los puntos de la partición. • $s(P)$ para la suma inferior y $S(P)$ para la suma superior. • m_i y M_i el ínfimo y supremo de f en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$ • $\|P\|$ para el diámetro de la partición. • $\underline{\int_a^b} f$ y $\overline{\int_a^b} f$ para la integral inferior y superior. • Empleo de $\int_a^b f$ y $\int_a^b f(x)dx$ para las integrales. • $\lim_{n\to\infty}$ para los límites y uso de la notación ε, δ.

Aunque por lo general, la notación es similar en ambos textos, podemos observar ciertas diferencias en la Tabla 6.2 que comentaremos a continuación. En primer lugar, la notación empleada para las sumas es la misma, pero en Larson y Edwards (2010) hay un apartado dedicado a esta notación sigma, además se menciona que se prefiere usar las variables i, j, k para los índices. En segundo lugar, aunque la notación usada para los puntos de las particiones y longitudes de los subintervalos es la misma, para denotar a una partición y su norma es diferente, pues Larson y Edwards (2010) emplea Δ para la partición y $\|\Delta\|$ para su norma, mientras que Burgos (2007) emplea P para la partición y $|P|$ para su diámetro (equivalente a norma en este caso). Por último, para las sumas inferiores y superiores, Larson y Edwards (2010) utilizan $s(n)$ y $S(n)$, respectivamente, mientras que Burgos (2007) utiliza $s(P)$ y $S(P)$; por lo que la diferencia reside en que una suma depende del valor n (número de puntos de la partición), mientras que la otra depende de la propia partición.

A parte de estas diferencias, cabe mencionar la notación usada en ambos textos para expresar la integral. Ambos textos emplean la notación $\int_a^b f(x)dx$, sin embargo en Burgos (2007) también se utiliza la notación $\int_a^b f$ para expresar la integral. Ambos textos realizan una mención a la notación empleada en este concepto. Por un lado, Larson y Edwards (2010) expresan que:

> No es coincidencia que la notación para las integrales definidas sea similar a la que se utilizó para las integrales indefinidas. Se verá la razón en la siguiente sección cuando se introduzca el teorema fundamental del cálculo. (p. 273).

Por otro lado, Burgos (2007) realiza la siguiente apreciación sobre la notación empleada:

> A pesar de que la notación $\int_a^b f$ es atinada y precisa, sin embargo es poco práctica cuando, como es usual, la función f viene dada mediante una expresión $f(x)$, que da el valor de f para cada $x \in [a,b]$. En $\int_a^b f(x)dx$, la letra x representa a un valor arbitrario de «la variable» y puede ser sistituida por cualquier otra (distinta de las a, b y f); se dice que x es la letra «muda». (p. 289).

Cabe destacar también que además de esta apreciación realizada en Burgos (2007), también se menciona que dx no debe interpretarse como una diferencial multiplicando, sino como un elemento más de la notación, que tan solo informa de quién es la variable. Además, se hace referencia a las reglas nemotécnicas sin valor demostrativo que se pueden obtener de $\int_a^b f(x)dx$, aunque no menciona cuales son.

6.1.2. Convenios

Se va a considerar a través la Tabla 6.3 los convenios que se establecen en cada texto para la lectura de la expresión de integral.

Tabla 6.3
Convenios empleados para la integral definida en cada texto analizado

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
$\int_a^b f\,(x)dx$ recibe el nombre de integral definida de f de a a b. El número a es el límite inferior de integración, y el número b es el límite superior de integración.	En $\int_a^b f$ se dice que f es el integrando y que a y b son los límites inferior y superior de integración; la expresión $\int_a^b f$ se lee «integral desde a hasta b (o entre a y b) de f»; la expresión $\int_a^b f(x)dx$ se lee «integral desde a hasta b de f de x diferencial de x».

Observando la Tabla 6.3, podemos notar que a y b reciben el mismo nombre en ambos textos. Ahora bien, en cuanto a la expresión $\int_a^b f(x)dx$ hay pequeñas diferencias en los convenios empleados. Por un lado, Larson y Edwards (2010) tan solo mencionan que recibe el nombre de integral definida de f de a a b, mientras que, por otro lado, Burgos (2007) expresa como se lee la expresión completa («integral desde a hasta b de f de x diferencial de x»), siendo la diferencia notable el empleo de los términos «desde» y «hasta» y el añadir la lectura de «diferencial de x».

Además, Burgos (2007) también expresa como se lee la expresión $\int_a^b f$, la cual no se utiliza en Larson y Edwards (2010).

6.1.3. Resultados

Con respecto a los resultados, compararemos los resultados que aparecen en ambos libros, haciendo también mención de aquellos que tan solo aparecen en uno de ellos. Los resultados que aparecen en ambos textos son: «continuidad implica integrabilidad», «propiedad aditiva en intervalos» y «propiedad lineal de la integral definida».

Tabla 6.4
Teorema «la continuidad implica integrabilidad» en cada texto analizado

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$. Es decir, $\int_a^b f(x)dx$ existe.	Si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función continua en el intervalo compacto $[a, b]$, entonces f es integrable en $[a, b]$.

El enunciado de este teorema es el mismo en ambos libros. La única diferencia es que en Larson y Edwards (2010) se habla de intervalo cerrado, mientras que en Burgos (2007) se habla de intervalo compacto en su lugar, aunque en este caso tiene el mismo significado. Por otro lado, Larson y Edwards (2010) afirma también que f sea integrable en $[a, b]$ significa que $\int_a^b f(x)dx$ existe.

Cabe mencionar además, que en Burgos (2007) también se presenta el resultado que afirma que "la monotonía implica integrabilidad", lo cual nos da un abanico más amplio de funciones integrables.

A continuación, vamos a mostrar tres propiedades de la integral que se encuentran en la sección «propiedades de la integral» en Burgos (2007), mientras que en Larson y Edwards (2010) se encuentran en la propia sección «Sumas de Riemann e integrales definidas».

Tabla 6.5
Propiedad aditiva de intervalos en cada texto analizado

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
Si f es integrable en los tres intervalos cerrados determinados por a, b y c, entonces $\int_a^b f(x)dx = \int_a^c f(x)dx + \int_c^b f(x)dx$	Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada en el intervalo compacto $[a, b]$ y sea $c \in \mathbb{R}$ un punto de $[a, b]$, o sea $a < c < b$. Entonces se verifica que: la función f es integrable en $[a, b]$ si, y sólo si, lo es en $[a, c]$ y en $[c, b]$. Cuando estas integrales existen, se verifica que: $\int_a^b f = \int_a^c f + \int_c^b f$

En esta propiedad, podemos observar diferencias notables. En la Tabla 6.5 podemos ver que en Larson y Edwards (2010) se presupone la integrabilidad de f en todos los intervalos posibles y entonces se verifica la igualdad dada, mientras que en Burgos (2007) añade el resultado que dice "la función f es integrable en $[a, b]$ si, y sólo si, lo es en $[a, c]$ y en $[c, b]$", y cuando las integrales existen se verifica la igualdad.

Tabla 6.6

Linealidad de la integral en cada texto analizado

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
Si f y g son integrables en $[a, b]$ y k es una constante, entonces las funciones kf y $f \pm g$ son integrables en $[a, b]$, y 1. $\int_a^b kf(x)dx = k\int_a^b f(x)dx$ 2. $\int_a^b [f(x) \pm g(x)]dx = \int_a^b f(x)dx \pm \int_a^b g(x)dx$	Si f y g son dos funciones, reales, integrales ambas en un intervalo compacto $[a, b]$, entonces también es integrable la función $hf + kg$, para cualesquiera que sean $h, k \in \mathbb{R}$, y se verifica que $\int_a^b [hf(x) + kg(x)]dx$ $= h\int_a^b f(x)dx + k\int_a^b g(x)dx$

El enunciado de la linealidad de la integral es esencialmente el mismo, pero hay pequeños matices que nombraremos a continuación. En primer lugar, y el más llamativo es que en Larson y Edwards (2010) se expresa que se verifican dos propiedades (linealidad respecto al producto de una constante y linealidad respecto a la suma y diferencia), mientras que en Burgos (2007) se expresan estas dos propiedades uniéndolas en una sola, aunque ambas muestran la linealidad de la integral. Por último, señalar también que en Larson y Edwards (2010) se realiza la linealidad de la suma y diferencia, mientras que en Burgos (2007) tan solo de la suma, aunque sería conveniente para la comprensión por parte del estudiante que viniera expresado mediante, al menos, una observación señalando que la resta no es más que sumar el opuesto.

Tabla 6.7

Monotonía de la integral en cada texto analizado

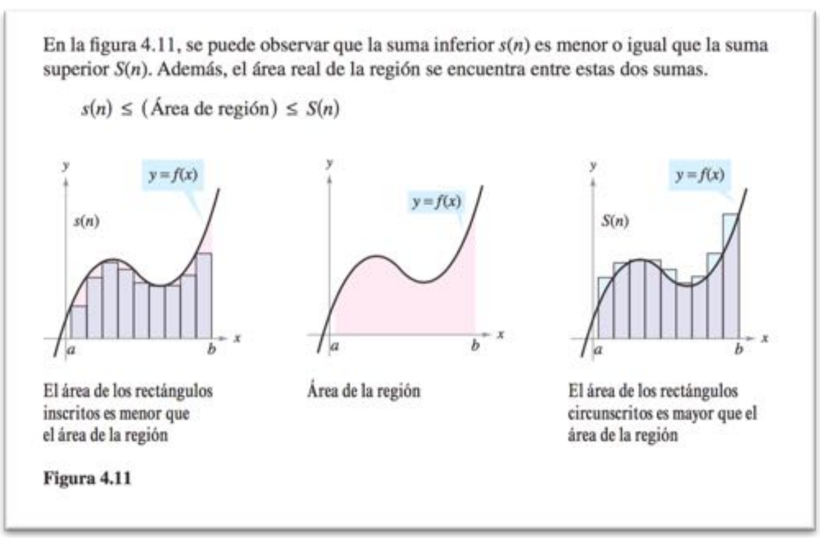
Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
1. Si f es integrable y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces $0 \leq \int_a^b f(x)dx$ **2.** Si f y g son integrables en el intervalo cerrado $[a, b]$ y $f(x) \leq g(x)$ para x en $[a, b]$, entonces $\int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$	Si f y g son dos funciones, reales, integrales en un intervalo compacto $[a, b]$, entonces se verifica que $[f(x) \leq g(x)$ para $a \leq x \leq b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \leq \int_a^b g(x)dx$ Caso particular: Si f es integrable en un intervalo compacto $[a, b]$, entonces $[f(x) \geq 0$ para $a \leq x \leq b] \Rightarrow \int_a^b f(x)dx \geq 0$

El enunciado de este resultado vuelve a ser en esencia el mismo. El único hecho reseñable es el hecho de que en Burgos (2007) se tome el caso en que f es no negativa como un caso particular del resultado que compara las dos funciones, mientras que Larson y Edwards (2010) este caso particular no se muestra como tal, sino que se expone antes del que compara dos funciones.

Una vez comparados estos resultados, se van a comentar aquellos resultados que tan solo aparecen en un texto, y que consecuencias y porqué motivos es así.

Es en Burgos (2007) donde aparece una mayor cantidad de resultados, partiendo de las propiedades de las particiones y de las sumas inferiores y superiores que no aparecen en Larson y Edwards (2010).

Aunque si bien es cierto que las propiedades de las sumas inferiores y superiores no aparecen en Larson y Edwards (2010) como tal, sí se hace mención acerca de que las sumas inferiores son menores que las superiores en una misma partición, apoyándose para ello en una representación gráfica como podemos ver en la Figura 6.1.


En la figura 4.11, se puede observar que la suma inferior $s(n)$ es menor o igual que la suma superior $S(n)$. Además, el área real de la región se encuentra entre estas dos sumas.

$$s(n) \le (\text{Área de región}) \le S(n)$$

Figura 4.11

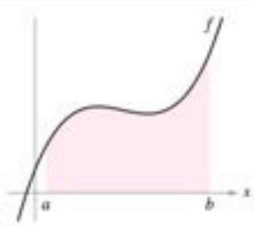
Figura 6.1. Sumas inferiores y superiores (Larson y Edwards, 2010, p. 263)

También aparecen en Burgos (2007) propiedades de la integral inferior y superior, las cuales no son mostradas en Larson y Edwards (2010). Es importante destacar que en Burgos (2007) se muestran algunos criterios de integrabilidad, hecho que no ocurre en Larson y Edwards (2010). Esto resulta importante porque nos muestra cuando son integrables las funciones, dándole formalidad y rigor al contenido. Larson y Edwards (2010) se centran en tan solo las funciones continuas (las cuales son integrables) pues busca más la aplicación hacia las áreas que darle un rigor al texto.

> *Condición de integrabilidad de Riemann.* La función $f : [a,b] \to \mathbb{R}$, que se supone acotada en el intervalo compacto $[a,b]$, es integrable en $[a,b]$ si, y sólo si, se verifica la siguiente condición: para cada $\varepsilon > 0$ existe una partición P de $[a,b]$ tal que $S(P) - s(P) < \varepsilon$.

Figura 6.2. Condición de integrabilidad de Riemann (Burgos, 2007, p. 287)

Para finalizar, hay que mencionar un resultado que se muestra en Larson y Edwards (2010), pero no en Burgos (2007). Este resultado es sobre el cálculo del área bajo una curva, la cual no es nombrada en Burgos (2007) en estas secciones mencionadas. Este teorema, que podemos ver en la Figura 6.3, es un resultado directo que se sigue de las definiciones dadas en Larson y Edwards (2010) para el área de una región y el de integral definida.



Se puede usar una integral definida para determinar el área de la región acotada por la gráfica de f, el eje x, $x = a$ y $x = b$
Figura 4.21

TEOREMA 4.5 LA INTEGRAL DEFINIDA COMO ÁREA DE UNA REGIÓN

Si f es continua y no negativa en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el área de la región acotada por la gráfica de f, del eje x y las rectas verticales $x = a$ y $x = b$ está dada por

$$\text{Área} = \int_a^b f(x)\,dx.$$

(Ver la figura 4.21.)

Figura 6.3. La integral definida como área de una región (Larson y Edwards, 2010, p. 274)

6.1.4. Conceptos

Vamos a analizar ahora los conceptos empleados por cada texto en esta sección. En primer lugar, vamos a tratar el concepto de partición. Respecto a esto, mencionar que en Burgos (2007) realiza una definición de dicho concepto, junto con el diámetro y el significado de partición posterior, hecho que no ocurre en Larson y Edwards (2010), en el que se presupone conocida la definición de partición y tan solo se define la norma, aunque la definición de partición se muestra en el texto sin ser destacada como el resto de definiciones.

Tabla 6.8
Definición de norma/diámetro de una partición en cada texto analizado

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
El ancho del subintervalo más grande de la partición es la norma de la partición y se denota por medio de $\|\Delta\|$.	Se llama diámetro de la partición P a la mayor de las amplitudes Δx_i, esto es, $\|P\| = \text{máx}\{\Delta x_1, \Delta x_2, \dots, \Delta x_n\}$.

Se puede observar que la definición en ambos textos es esencialmente la misma, con la diferencia de que en Larson y Edwards (2010) se expresa mediante un lenguaje verbal, mientras que en Burgos (2007) se añade el lenguaje simbólico. Además, ambos textos realizan las observaciones de cuál es el valor de la norma en caso de que las amplitudes sean todas iguales, y como se relaciona esta con el número de intervalos en el caso general.

A continuación, se muestra la definición de sumas inferiores y superiores dada por ambos textos:

Tabla 6.9
Definición de sumas inferiores y superiores en cada texto analizado

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
Como f es continua, el teorema del valor extremo garantiza la existencia de un valor mínimo y uno máximo de $f(x)$ en cada subintervalo. $f(m_i)$ = valor mínimo de $f(x)$ en el i-ésimo subintervalo $f(M_i)$ = valor máximo de $f(x)$ en el i-ésimo subintervalo A continuación, se define un rectángulo inscrito que se encuentra dentro de la i-ésima subregión y un rectángulo circunscrito que se extiende fuera de la i-ésima región. La altura del i-ésimo rectángulo inscrito es $f(m_i)$ y la	Sea $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada en el intervalo compacto $[a, b]$ para cada partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$, denotaremos por m_i y M_i al ínfimo y supremo de f en el intervalo $[x_{i-1}, x_i]$, donde $i = 1, 2, \dots, n$. Se llaman sumas inferior y superior (de Darboux) de la función f correspondientes a la partición P a $s(P) = \sum_{i=1}^{n} m_i \Delta x_i \quad y$ $S(P) = \sum_{i=1}^{n} M_i \Delta x_i$

Tabla 6.9

Definición de sumas inferiores y superiores en cada texto analizado

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
altura del i-ésimo rectángulo circunscrito es $f(M_i)$. La suma de las áreas de los rectángulos inscritos recibe el nombre de suma inferior, y la suma de las áreas de los rectángulos circunscritos se conoce como suma superior. $\text{Suma inferior } = s(n) = \sum_{i=1}^{n} f(m_i)\Delta x$ $\text{Suma superior } = S(n) = \sum_{i=1}^{n} f(M_i)\Delta x$	

En esta definición, podemos observar como en Larson y Edwards (2010) se dedica un apartado entero a la descripción del proceso para tomar las sumas inferiores y superiores para el cálculo del área de una región bajo una curva. Por otro lado, en Burgos (2007) se muestra tan solo la definición tal cual se muestra en la Tabla 6.9, junto con algunas propiedades y sin hacer referencia a las áreas ni rectángulos. Aunque sí es cierto que hay gráficas que muestran dichos rectángulos, pero alguna puede resultar confusa.

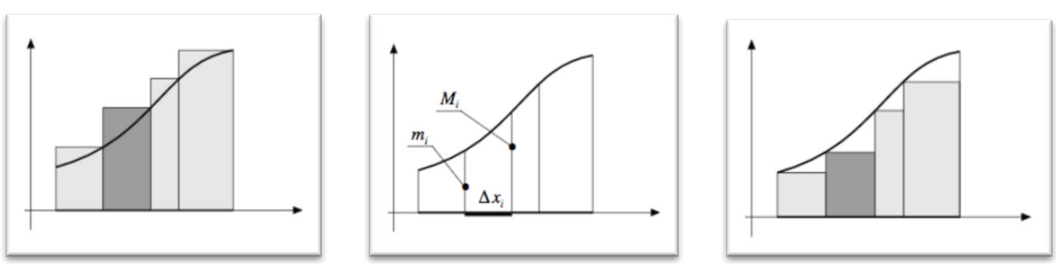


Figura 6.4. Gráfica de las sumas inferiores y superiores (Burgos, 2007, p. 284)

En cuanto a las diferencias en la definición, la más resaltable es el empleo de m_i y M_i por parte de cada texto. Mientras que para Burgos (2007) estos son el ínfimo y supremo de f, es decir, son valores de la función (en el eje y), para Larson y Edwards (2010) estos son los puntos donde f toma el mínimo y el máximo, esto es, valores del eje x. Está diferencia puede causar confusión para los estudiantes que trabajen con ambos textos.

Hay otras pequeñas diferencias, como que Larson y Edwards (2010) consideran una función continua (pues están trabajando con áreas bajo la curva), mientras que en Burgos (2007) solo se pide que sea acotada. Otra diferencia es el empleo de subintervalos de la partición de igual longitud en Larson y Edwards (2010), mientras que en Burgos (2007) se trabajan con particiones generales.

Por último, resaltar el hecho de que Burgos (2007) le dé nombre a estas sumas (de Darboux), mientras que en Larson y Edwards (2010) no se menciona nada al respecto.

Tras esto, se expondrá la definición de función integrable y de integral definida que usa cada texto (Figura 6.5 y Figura 6.6).

DEFINICIÓN DE UNA INTEGRAL DEFINIDA

Si f se define en el intervalo cerrado $[a, b]$ y el límite de las sumas de Riemann sobre las particiones Δ

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i$$

existe (como se describió antes), entonces f es **integrable** en $[a, b]$ y el límite se denota por

$$\lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = \int_a^b f(x)\,dx.$$

El límite recibe el nombre de **integral definida** de f de a a b. El número a es el **límite inferior** de integración, y el número b es el **límite superior** de integración.

Figura 6.5. Definición de integral definida (Larson y Edwards, 2010, p. 273)

Sea $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ una función acotada en el intervalo compacto $[a,b]$. Se dice que f es integrable (según Riemann o R-integrable) en $[a,b]$ si son iguales sus integrales inferior y superior en $[a,b]$ y, entonces, ambas se representan por

$$\int_a^b f \quad \text{o} \quad \int_a^b f(x)\,dx$$

y se dice que este número real es la integral de f en $[a,b]$. Es decir, f es integrable en $[a,b]$ si y sólo si hay un único número, que se representa por $\int_a^b f$, tal que $s(P) \leqslant \int_a^b f \leqslant S(P)$ para toda partición P de $[a,b]$.

Figura 6.6. Definición de integral definida (Burgos, 2007, p. 287)

Aquí se pueden ver notables diferencias en la definición. En primer lugar, en Larson y Edwards (2010) no se pide que la función sea acotada, mientras que en Burgos (2007) sí. Otro hecho reseñable es que en Larson y Edwards (2010) se dice que una función es integrable si existe el límite de las sumas de Riemann cuando la norma de la partición tiende a cero, mientras que en Burgos (2007) se dice que una función es integrable si son iguales sus integrales inferior y superior (que son el supremo y el ínfimo de todas las sumas de Darboux). Por lo tanto, en Larson y Edwards (2010) se define a partir de las sumas de Riemann y en Burgos (2007) a partir de las sumas de Darboux. Por último, destacar que mientras que en Larson y Edwards (2010) se le llama «integral definida» a dicho límite denotado por $\int_a^b f(x)dx$, en Burgos (2007) se dice que dicho número real (el valor de las integrales inferior y superior) es la «integral» a secas, denotado por $\int_a^b f$ o $\int_a^b f(x)dx$.

Por último, vamos a centrarnos en la definición de suma de Riemann. Antes de mostrarla en cada texto, hay que destacar el orden en que esta se presenta en cada uno. Pues bien, por un lado, en Larson y Edwards (2010) se presenta al inicio de la sección, antes de definir la integral definida, pues se usa en esta. Por otro lado, en Burgos (2007) se define en otra sección («La integral como límite de sumas») tras haber presentado toda la teoría relativa a integrales definidas e incluso tras el Teorema fundamental del cálculo.

Se mostrará ahora como se define las sumas de Riemann en cada texto.

Tabla 6.10
Definición de sumas de Riemann en cada texto analizado

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
Sea f definida en el intervalo cerrado $[a, b]$, y sea Δ una partición de $[a, b]$ dada por $a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$, donde Δx_i es el ancho del i-ésimo subintervalo. Si c_i es cualquier punto en el i-ésimo subintervalo $[x_{i-1}, x_i]$ entonces la suma $\sum_{i=1}^{n} f(c_i)\Delta x_i, \qquad x_{i-1} \le c_i \le x_i$ se denomina una suma de Riemann de f para la partición Δ.	Sea $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ una función acotada en el intervalo compacto $[a, b]$ para cada partición $P = \{x_0, x_1, \dots, x_n\}$ de $[a, b]$, llamaremos familia de puntos intermedios (asociada a P) a cualquiera de los conjuntos $T = \{t_1, \dots, t_n\}$ formado por los puntos $t_i \in [x_{i-1}, x_i]$, para cada $i = 1, 2, \dots, n$. Se llama suma de Riemann de f, relativa a la partición P y a la correspondiente familia de puntos T, al número a la partición P a

Tabla 6.10

Definición de sumas de Riemann en cada texto analizado

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
	$\sigma(P,T) = \sum_{i=1}^{n} f(t_i)\Delta x_i,$ $(\Delta x_i = x_i - x_{i-1})$

En esta definición se pueden observar pocas diferencias. Destacar entre ellas, que en Larson y Edwards (2010) se define una suma de Riemann de f para una partición, mientras que en Burgos (2007) se define la suma de Riemann de f, relativa a la partición P y a la correspondiente familia de puntos T. Es decir, Larson y Edwards (2010) la asocian a una partición y Burgos (2007) la asocia a una partición y una familia de puntos intermedios.

Relativo a esto, cabe mencionar, que en Burgos (2007), tras definir las sumas de Riemann, da otra definición de integral definida utilizando las sumas de Riemann (como se muestra en la Figura 6.7) equiparándose esta con la dada en Larson y Edwards (2010) (Figura 6.5).

Sea $f:[a,b]\rightarrow\mathbb{R}$ una función acotada en el intervalo compacto $[a,b]$. Se verifica que: la función f es integrable en $[a,b]$ y su integral es el número I si, y sólo si, se verifica la siguiente condición:

El número I es tal que, para cada $\varepsilon>0$, existe un $\delta>0$ tal que $|I-\sigma(P,T)|<\varepsilon$ para toda partición P que tenga diámetro menor que δ y para cualquiera que sea la correspondiente familia de puntos intermedios T; es decir, esquemáticamente:

$$\forall\,\varepsilon>0,\quad \exists\,\delta>0\ /\ |P|<\delta\ \Rightarrow\ |I-\sigma(P,T)|<\varepsilon,\quad \forall\,T$$

Nota. Hay quienes resumen este resultado diciendo que «la integral es el límite de las sumas de Riemann cuando el diámetro de la partición tiende a cero».

Figura 6.7. Definición de integral utilizando sumas de Riemann (Burgos, 2007, p. 360)

Las diferencias entre esta y la mostrada por Larson y Edwards (2010) anteriormente, es que en Burgos (2007) se expone la definición para que exista el límite de las sumas de

Riemann, mientras que en Larson y Edwards (2010) se realiza lo que expone la nota de la definición de Burgos (2007), afirmando que es integrable si dicho límite existe. A pesar de esto, hay que mencionar que Larson y Edwards (2010) previamente expresan que significa afirmar que dicho límite existe (véase la Figura 6.8).

Integrales definidas

Para definir la integral definida, considerar el siguiente límite.

$$\lim_{\|\Delta\| \to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i = L$$

Afirmar que este límite existe, significa que hay un número real L, tal que para cada $\varepsilon > 0$ existe una $\delta > 0$ tal que para toda partición de $\|\Delta\| < \delta$ se sigue que

$$\left| L - \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \right| < \varepsilon$$

a pesar de cualquier elección de c_i en el i-ésimo subintervalo de cada partición de Δ.

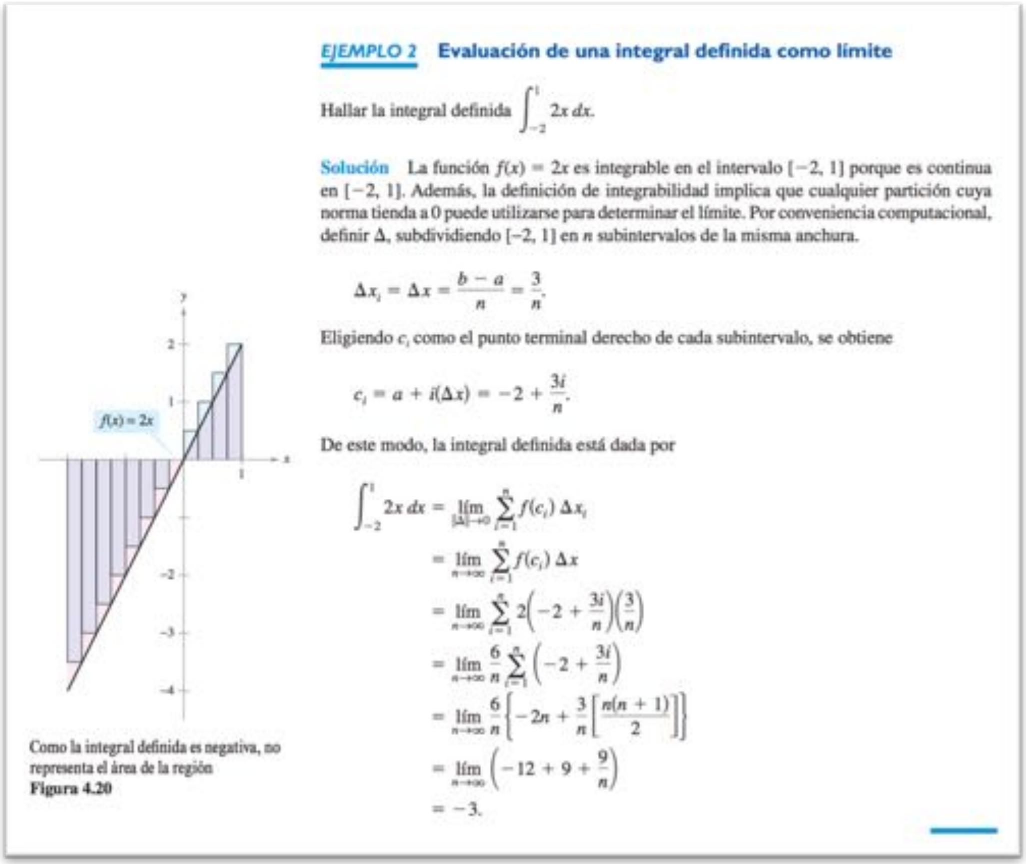
Figura 6.8. Significado de la existencia del límite para definir la integral definida (Larson y Edwards, 2010, p. 273)

6.1.5. Razonamientos

En este apartado vamos a analizar las demostraciones que se realizan en estas secciones relacionadas con la integral definida. Aquí no se puede hacer comparaciones, pues Burgos (2007) expone una gran cantidad de resultados con demostraciones, mientras que el número de resultados que exponen Larson y Edwards (2010) es mucho menor y además sin demostraciones, justificando que van más allá del objetivo de dicho texto.

6.1.6. Estrategias

Con respecto a las estrategias, Larson y Edwards (2010) expone lo siguiente para resolver integrales definidas: "Por ahora se puede calcular una integral definida de dos maneras: usando la definición en términos de límites o verificando si la integral definida representa el área de una región geométrica común, tal como un rectángulo, triángulo o semicírculo" (p. 275), mostrando además una gran cantidad de ejemplos de cada caso. Estas estrategias se presentan a través de un ejemplo detallado (véase la Figura 6.9).



EJEMPLO 2 Evaluación de una integral definida como límite

Hallar la integral definida $\int_{-2}^{1} 2x\,dx$.

Solución La función $f(x) = 2x$ es integrable en el intervalo $[-2, 1]$ porque es continua en $[-2, 1]$. Además, la definición de integrabilidad implica que cualquier partición cuya norma tienda a 0 puede utilizarse para determinar el límite. Por conveniencia computacional, definir Δ, subdividiendo $[-2, 1]$ en n subintervalos de la misma anchura.

$$\Delta x_i = \Delta x = \frac{b-a}{n} = \frac{3}{n}.$$

Eligiendo c_i como el punto terminal derecho de cada subintervalo, se obtiene

$$c_i = a + i(\Delta x) = -2 + \frac{3i}{n}.$$

De este modo, la integral definida está dada por

$$\begin{aligned}
\int_{-2}^{1} 2x\,dx &= \lim_{\|\Delta\|\to 0} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x \\
&= \lim_{n\to\infty} \sum_{i=1}^{n} 2\left(-2+\frac{3i}{n}\right)\left(\frac{3}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n} \sum_{i=1}^{n} \left(-2+\frac{3i}{n}\right) \\
&= \lim_{n\to\infty} \frac{6}{n}\left\{-2n+\frac{3}{n}\left[\frac{n(n+1)}{2}\right]\right\} \\
&= \lim_{n\to\infty} \left(-12+9+\frac{9}{n}\right) \\
&= -3.
\end{aligned}$$

Como la integral definida es negativa, no representa el área de la región
Figura 4.20

Figura 6.9. Ejemplo de la evaluación de una integral definida como límite (Larson y Edwards, 2010, p. 274)

En este aspecto, Burgos (2007) es un texto menos explícito, no muestra ningún tipo de estrategia que ayude a resolver las integrales y la mayoría de ejercicios resueltos que ofrece son resultados con sus demostraciones. Tan solo se expone algún ejercicio resuelto para comprobar la integrabilidad de alguna función y un ejercicio resuelto que calcula la integral, aunque no se dan pautas ni estrategias para resolver otras integrales.

6.2. Sistema de representación

En ambos textos el sistema de representación aparece tanto el sistema de representación algebraico como el gráfico. En Larson y Edwards (2010) se disponen de una gran cantidad de representaciones gráficas que ayudan a entender cada una de las definiciones, los resultados y los ejemplos. Si bien es cierto que en Burgos (2007) también se disponen gran cantidad de representaciones gráficas, la cantidad es menor comparada con Larson y Edwards (2010), pues en este solo se presentan junto algunos resultados, demostraciones y ejemplos.

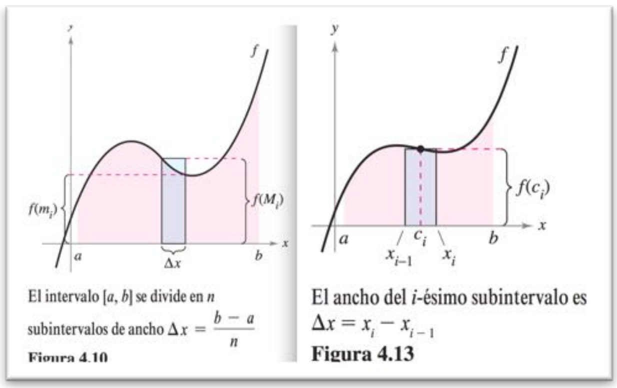


Figura 6.10. Representación de uno de los intervalos de las sumas superior e inferior (de Darboux) a la izquierda y de las sumas de Riemann a la derecha (Larson y Edwards, 2010, p. 263 y 265)

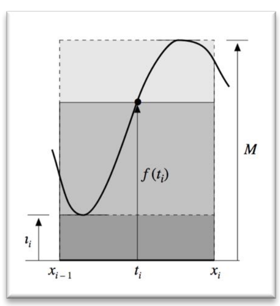


Figura 6.11. Representación de uno de los intervalos de las sumas de Riemann en comparación con las sumas inferior y superior de Darboux (Burgos, 2007, p. 359)

En las Figura 6.10 y Figura 6.11 podemos observar como las representaciones mostradas en cada texto son similares, con la diferencia de que en Larson y Edwards (2010) se usan colores que hacen las representaciones más vistosas.

Por otro lado, cabe destacar que en Burgos (2007) hay mayor cantidad de representaciones de la recta real para ubicar en ellas las sumas inferiores y superiores, las integrales inferior y superior, etc. Mientras que en Larson y Edwards (2010) este tipo de representaciones son menos frecuentes.

Por otro lado, citar que la cantidad de representaciones gráficas empleadas en los ejemplos de Larson y Edwards (2010) es mayor, pues en Burgos (2007) hay algunos ejemplos en los que no se emplea representación gráfica.

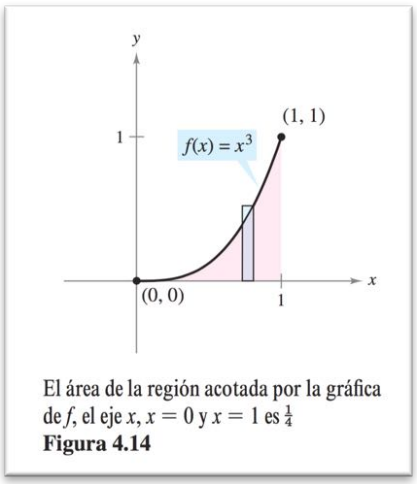


Figura 6.12. Representación gráfica en un ejemplo de Larson y Edwards (2010, p. 266)

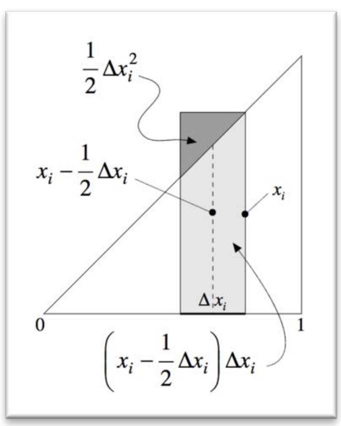


Figura 6.13. Representación gráfica en un ejemplo de Burgos (2007, p. 287)

Por último, cabe mencionar que todas las representaciones que se insertan en Larson y Edwards (2010) como figuras tienen un pie de imagen que las describe, mientras que en Burgos (2007) no hay nada que las describe. Este hecho puede hacer que los estudiantes tengan más facilidades para entender y asociar al texto las representaciones expuestas en Larson y Edwards (2010) que aquellas expuestas en Burgos (2007).

6.3. Sentidos y modos de uso

En este apartado destaca la presencia de determinadas aplicaciones o aspectos fenomenológicos en Larson y Edwards (2010), mientras que Burgos (2007) hay una ausencia total de dichos aspectos. Se mostrarán a continuación algunos de estos sentidos que se presentan en Larson y Edwards (2010).

Por un lado, se pueden observar referencias históricas a matemáticos de importancia en el tema de estudio, como puede verse en la Figura 6.14.

Figura 6.14. Referencias históricas a matemáticos importantes en Larson y Edwards (2010, p. 261 y 272)

Siguiendo este hilo histórico, se hace referencia a un artículo que habla de la historia de la integral definida, para que el estudiante pueda obtener un origen fenomenológico histórico a dicho concepto.

PARA MAYOR INFORMACIÓN
Para obtener más información acerca de la historia de la integral definida, ver el artículo "The Evolution of Integration", de A. Shenitzer y J. Steprāns en *The American Mathematical Monthly*.

Figura 6.15. Nota para obtener más información acerca de la historia de la integral definida (Larson y Edwards, 2010, p. 273)

Por último, hay que destacar el empleo constante de la aplicación de la integral definida al cálculo de áreas empleado Larson y Edwards (2010) (Figura 6.16). Además, se emplea esta aplicación en el otro sentido, es decir, usar áreas de figuras conocidas para el cálculo de integrales definidas (Figura 6.17).

EJEMPLO 5 Hallar el área mediante la definición de límite

Encontrar el área de la región limitada por la gráfica $f(x) = x^3$, el eje x y las rectas verticales $x = 0$ y $x = 1$, como se muestra en la figura 4.14.

Figura 6.16. Ejemplo de cálculo de área (Larson y Edwards, 2010, p. 266)

EJEMPLO 3 Areas de figuras geométricas comunes

Dibujar la región correspondiente a cada integral definida. Evaluar después cada integral utilizando una fórmula geométrica.

a) $\int_1^3 4\,dx$ ***b)*** $\int_0^3 (x + 2)\,dx$ ***c)*** $\int_{-2}^2 \sqrt{4 - x^2}\,dx$

Figura 6.17. Ejemplo de cálculo de integrales definidas a través de áreas de figuras conocidas (Larson y Edwards, 2010, p. 275)

7. Comparación sobre el tratamiento del Teorema Fundamental del Cálculo

En este capítulo se analizará la sección correspondiente al Teorema Fundamental del Cálculo (TFC) de cada uno de los textos. Tanto en Larson y Edwards (2010) como en Burgos (2007) dicha sección se denomina «El Teorema Fundamental del Cálculo». Esta sección está dedicada al desarrollo de dichos teoremas fundamentales por lo que no hay definición de conceptos.

7.1. Estructura conceptual

En primer lugar, se analizarán aspectos conceptuales. En particular, al ser una sección dedicada a teoremas, tendrá especial relevancia los resultados y procedimientos aquí mostrados, por lo que el resto de aspectos se expondrán en el anexo debido a la falta de espacio.

7.1.1. Resultados

En este apartado, se le va a dedicar un espacio a comparar primero los nombres asignados los teoremas fundamentales del cálculo, pues, aunque resulte sorprendente, no coinciden los nombres de estos con los enunciados en ambos textos. Esto puede suponer un gran conflicto para el estudiante que trabaje con ambos textos, no sabiendo cual es el enunciado correcto del primer o segundo teorema fundamental del cálculo.

Pues bien, lo que en Burgos (2007) se llama «Teorema Fundamental del Cálculo», en Larson y Edwards (2010) se denomina como «segundo Teorema Fundamental del Cálculo». Mientras que el denominado primer «Teorema Fundamental del Cálculo» en Larson y Edwards (2010), se trata de la «regla de Barrow» en Burgos (2007). Por lo que en Larson y Edwards (2010), no aparece ningún resultado bajo el nombre de «regla de Barrow». En cuanto al que se denomina «segundo Teorema Fundamental del Cálculo» considerado en Burgos (2007), su enunciado no aparece en Larson y Edwards (2010).

Una vez dicho esto, para realizar la comparación, se identifica aquellos con el mismo enunciado para poder analizar las diferencias que se pueden encontrar. Para dar nombre a estos enunciado se seguirá lo realizado en Burgos (2007), ya que se encuentra del mismo modo que en otros manuales de cálculo conocidos e internacionales como Apostol (2001) y Spivak (2012).

En primer lugar, se expondrá el enunciado del primer Teorema Fundamental del cálculo en cada uno de los textos.

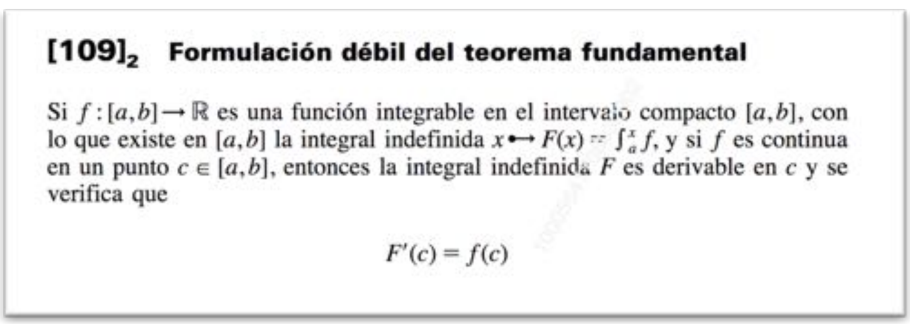
Tabla 7.1
Primer Teorema Fundamental del Cálculo en cada texto analizado

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
Si f es continua en el intervalo abierto I que contiene a a, entonces, para todo x en el intervalo $$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$$	Si $f: [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable en el intervalo compacto $[a,b]$, se conviene en decir que la función $F: [a,b] \to \mathbb{R}$, definida así $x \mapsto F(x) = \int_a^x f$, es la función integral indefinida o función integral de f correspondiente al punto a. Se verifica que: 1º. Si f es integrable en $[a,b]$, entonces F es continua en $[a,b]$. 2º. *Teorema fundamental.* Si f es continua en $[a,b]$, entonces F es derivable en $[a,b]$ y su derivada es $F'(x) = f(x)$ para $x \in [a,b]$; esto es, la integral indefinida F de f es una primitiva (o antiderivada) de f en $[a,b]$; dicho de otro modo, es $D\left[\int_a^x f\right] = f(x)$

Como se puede observar en la Tabla 7.1, el enunciado que se encuentra en Larson y Edwards (2010) se corresponde con el segundo punto del de Burgos (2007), al que llama «Teorema fundamental», por lo que se compararán estas dos partes.

La primera diferencia importante que se encuentra es que en Larson y Edwards (2010) se pide que f se continua en un intervalo abierto, mientras que en Burgos (2007) se pide que lo sea en un cerrado. Además, en Burgos (2007) concluye que $\int_a^x f$ es derivable en el intervalo cerrado y que su derivada es f. Sin embargo, en Larson y Edwards (2010) no concluye que $\int_a^x f$ sea derivable, simplemente expone que la derivada de $\int_a^x f$ es f en el intervalo abierto donde f es continua, dándose a entender de esta forma que si tiene derivada es porque es derivable.

Cabe mencionar también, que en Burgos (2007) se expone una formulación débil del teorema fundamental (véase la Figura 7.1), en el que se observa como la continuidad de f en un punto implica la derivabilidad de F en dicho punto y su derivada es la propia f, reduciendo así la condición de continuidad a los puntos que queramos estudiar.



[109]$_2$ Formulación débil del teorema fundamental

Si $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ es una función integrable en el intervalo compacto $[a,b]$, con lo que existe en $[a,b]$ la integral indefinida $x \longmapsto F(x) = \int_a^x f$, y si f es continua en un punto $c \in [a,b]$, entonces la integral indefinida F es derivable en c y se verifica que

$$F'(c) = f(c)$$

Figura 7.1. Formulación débil del teorema fundamental (Burgos, 2007, p. 312)

A continuación, se expondrá el enunciado de la regla de Barrow.

Tabla 7.2
Regla de Barrow en cada texto analizado

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
Si una función f es continua en el intervalo cerrado $[a,b]$ y F es una antiderivada de f en el intervalo $[a,b]$, entonces $$\int_a^b f(x)dx = F(b) - F(a).$$	Si f es una función continua en el intervalo compacto $[a,b]$ y si $G\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ es una función primitiva (cualquiera) de f en $[a,b]$, entonces se verifica que $$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_{x=a}^{x=b}$$ donde el último miembro es una forma abreviada de expresar el que le precede (a este

Tabla 7.2

Regla de Barrow en cada texto analizado

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
	resultado también se le llama «fórmula de Newton-Leibniz».

Con respecto a este resultado, aparte de las diferencias de notación mencionadas en el Anexo I no existen más diferencias entre ambos textos.

Por último, se comparará el teorema del valor medio para integrales, el cual se encuentra en Burgos (2007) en el apartado anterior «Propiedades de la integral».

Tabla 7.3

Teorema del valor medio para integrales en cada texto analizado

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
Si f es continua en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces existe un número c en el intervalo cerrado $[a, b]$, tal que $$\int_a^b f(x)dx = f(c)(b-a)$$	Si $f: [a, b] \to \mathbb{R}$ es una función integrable en el intervalo compacto $[a, b]$. 1º. Si además $m \leq f(x) \leq M$ para $x \in [a, b]$ y para unos ciertos $m, M \in \mathbb{R}$, entonces existe $\mu \in \mathbb{R}$ tal que: $$\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a),\ \ siendo\ m \leq \mu \leq M$$ (a μ se le llama valor medio integral de f en $[a, b]$). 2º. Si además f es continua en $[a, b]$, entonces existe algún punto ξ de $[a, b]$ tal que $$\int_a^b f(x)dx = f(\xi)(b-a),\ \ siendo\ a \leq \xi \leq b$$

El enunciado mostrado en Larson y Edwards (2010) del teorema del valor medio para integrales se corresponde con la segunda parte del mostrado en Burgos (2007). Se comparará entonces tan solo esto. Los enunciados son el mismo, salvo pequeñas variaciones de notación.

Además, en el primer punto del teorema mostrado en Burgos (2007), se expresa un resultado similar pero con diferentes condiciones. En el primero tan solo se pide que f sea integrable y acotada en lugar de continua. Como resultado se obtiene $\int_a^b f(x)dx = \mu(b-a),\ \ siendo\ m \leq \mu \leq M$, con μ un número real, es decir, se cambia una imagen de

f, $f(\xi)$, por un número real, μ, pues al no ser f continua no se puede garantizar que exista una imagen de f que garantice la igualdad.

Cabe mencionar también que en Burgos (2007) se presenta además una generalización de este teorema.

Por último, se señalará los resultados que aparecen en tan solo uno de los textos. Por un lado, el enunciado de lo que Burgos (2007) llama «Segundo Teorema Fundamental del Cálculo» tan solo aparece en Burgos (2007). Este teorema es similar a la Regla de Barrow, mostrada en la Tabla 6.5, pero cambiando la condición de continuidad por integrabilidad. Por otro lado, en Larson y Edwards (2010) aparece un resultado denominado «teorema del cambio neto», en el que se expresa que la integral definida de la razón de cambio de una cantidad $F'(x)$ proporciona el cambio neto.

7.1.2. Razonamientos

En este apartado se van a analizar las demostraciones de los resultados comunes expuestos anteriormente. Estas son: «Primer Teorema Fundamental del Cálculo», «regla de Barrow» y «teorema de la media de la integral». Además, tiene especial relevancia señalar también el orden en que estos aparecen en los textos y si alguno se muestra como consecuencia de otro.

En primer lugar, se compara las demostraciones del «Primer Teorema Fundamental del Cálculo» (Tabla 7.1). Esta es esencialmente la misma en ambos textos, en ella se usa tanto la aditividad de la integral como el teorema del valor medio para integrales. La principal diferencia reside en que en Larson y Edwards (2010) se comienza con la definición de la derivada y a partir de ella se opera con el numerador para que el límite final resulte el deseado, mientras que en Burgos (2007) se opera primero con el numerador y luego se expone la definición de derivada y se halla directamente el límite con base en lo hecho anteriormente.

En segundo lugar, se analiza las demostraciones de la «Regla de Barrow» (Tabla 6.5). Las demostraciones mostradas aquí son totalmente diferentes y aquí juega gran papel el orden en el que están presentados los resultados. En Burgos (2007), se demuestra como una consecuencia del Teorema Fundamental del Cálculo (véase la Figura 7.2), pues se presenta después que este. Por otro lado, en Larson y Edwards (2010) se demuestra independientemente del Teorema Fundamental del Cálculo (véase la Figura 7.3), pues la regla de Barrow se presenta antes bajo el nombre de «Teorema Fundamental del Cálculo» y el Teorema Fundamental del Cálculo se presenta después bajo el nombre de «segundo Teorema Fundamental del Cálculo». Además, en la demostración que se realiza Larson y Edwards (2010) solo se usa la condición de que f sea continua para concluir que es integrable, por lo que bastaría con poner la condición de que f fuese integrable. De hecho, esta demostración es en esencia la misma que la realizada por Burgos (2007) para el segundo Teorema Fundamental del Cálculo, el cual pide como condición que f sea integrable.

Demostración

Según el Teorema Fundamental del Cálculo (véase [109]), la integral indefinida $x \longmapsto F(x) = \int_a^x f$ es una primitiva de f en $[a,b]$. Como G es, también, una primitiva de f en $[a,b]$, se puede asegurar (véase [082]) que $G(x) - F(x)$ es constante; sea C esta constante, de modo que $G(x) = F(x) + C$ para todo $x \in [a,b]$. Resulta entonces evidente que:

$$G(b) - G(a) = [F(b) + C] - [F(a) + C] = \int_a^b f - \int_a^a f = \int_a^b f$$

como había que comprobar.

Figura 7.2. Demostración de la regla de Barrow (Burgos, 2007, p. 314)

DEMOSTRACIÓN La clave para la demostración consiste en escribir la diferencia $F(b) - F(a)$ en una forma conveniente. Sea Δ la siguiente partición de $[a, b]$.

$$a = x_0 < x_1 < x_2 < \cdots < x_{n-1} < x_n = b$$

Mediante la resta y suma de términos análogos, se obtiene

$$\begin{aligned} F(b) - F(a) &= F(x_n) - F(x_{n-1}) + F(x_{n-1}) - \cdots - F(x_1) + F(x_1) - F(x_0) \\ &= \sum_{i=1}^{n} [F(x_i) - F(x_{i-1})]. \end{aligned}$$

De acuerdo con el teorema del valor medio, se sabe que existe un número c_i en el i-ésimo subintervalo tal que

$$F'(c_i) = \frac{F(x_i) - F(x_{i-1})}{x_i - x_{i-1}}.$$

Como $F'(c_i) = f(c_i)$, puede dejarse que $\Delta x_i = x_i - x_{i-1}$ y obtenerse

$$F(b) - F(a) = \sum_{i=1}^{n} f(c_i)\,\Delta x_i.$$

Esta importante ecuación dice que al aplicar repetidamente el teorema del valor medio, se puede siempre encontrar una colección de c_i tal que la *constante* $F(b) - F(a)$ es una suma de Riemann de f en $[a, b]$ para cualquier partición. El teorema 4.4 garantiza que el límite de sumas de Riemann sobre las particiones con $\|\Delta\| \to 0$ existe. Así, al tomar el límite (cuando $\|\Delta\| \to 0$) produce

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

Figura 7.3. Demostración de la regla de Barrow (Larson y Edwards, 2010, p. 283)

Por último, se comparan las demostraciones del teorema del valor medio de la integral de ambos textos (Tabla 7.3). Esta demostración es esencialmente la misma en ambos.

Para finalizar este apartado, se comentará el orden en que cada texto presenta los teoremas fundamentales del cálculo, pues, como se ha visto, puede tener relevancia a la hora de realizar las pruebas. El hecho más destacable es que, en Larson y Edwards (2010), la regla de Barrow se presenta antes que el Teorema Fundamental del Cálculo por lo que no puede demostrarse como consecuencia de este; mientras que en Burgos (2007) primero se presenta el primer Teorema Fundamental del Cálculo, después la regla de Barrow como consecuencia de este, y por último el segundo Teorema Fundamental del Cálculo.

7.2. Sistemas de Representación

En ambos textos aparece tanto el sistema de representación algebraico como el gráfico. En Larson y Edwards (2010), al igual que ocurría en el capítulo anterior, se disponen de una gran cantidad de representaciones gráficas representando el área bajo la curva en varios ejemplos, así como otras que ayudan a entender ciertos resultados de una manera gráfica y con una interpretación geométrica. En cambio, en Burgos (2007) en esta sección apenas se presentan representaciones gráficas, salvo algunas para asociar el Teorema Fundamental del Cálculo al área bajo una curva y para mostrar la interpretación geométrica de algún resultado.

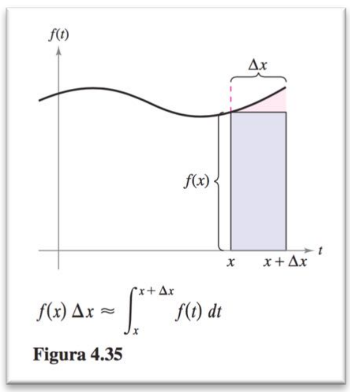


Figura 7.4. Representación gráfica de la demostración del primer TFC (Larson y Edwards, 2010, p. 289)

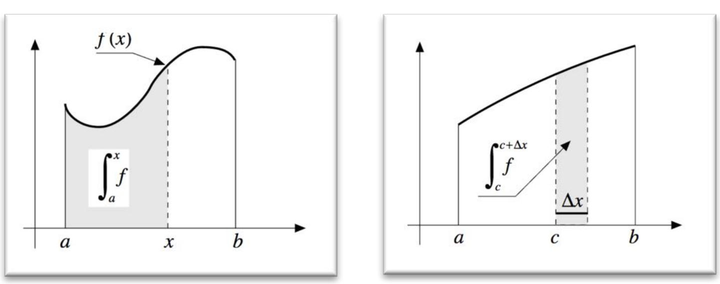
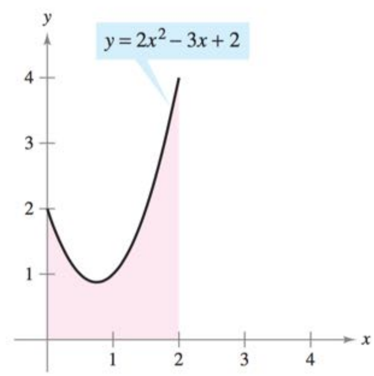


Figura 7.5. Representación gráfica del enunciado y demostración del primer TFC (Burgos, 2007, pp. 310-311)

Además, como ya se ha comentado, Larson y Edwards (2010) ilustran cada ejemplo con una representación gráfica que asocia la integral a un área (véase la Figura 7.6), mientras que en Burgos (2007) no hay ninguna representación gráfica en los ejemplos mostrados.



El área de la región acotada por la gráfica de y, el eje x, $x = 0$ y $x = 2$ es $\frac{10}{3}$
Figura 4.28

Figura 7.6. Representación gráfica de un ejemplo de la Regla de Barrow (Larson y Edwards, 2010, p. 284)

7.3. Sentidos y modos de uso

En este apartado, en línea con lo observado en los capítulos anteriores, destaca la presencia de determinadas aplicaciones o aspectos fenomenológicos en Larson y Edwards (2010), mientras que Burgos (2007) hay una ausencia total de dichos aspectos. Se mostrarán a continuación algunos de estos sentidos que se presentan en Larson y Edwards (2010).

En primer lugar, cabe destacar que en Larson y Edwards (2010) mencionan la relación estrecha que tienen entre si el cálculo diferencial e integral, a pesar de su aparente diferencia. Pero lo más interesante, es que se menciona como fue descubierta esta relación por Newton y Leibniz de manera independiente. Con respecto a esto Larson y Edwards (2010) mencionan lo siguiente acerca del descubrimiento de esta relación:

> La pendiente de la recta tangente se definió utilizando el cociente $\Delta y/\Delta x$ (la pendiente de la recta secante). De manera similar, el área de la región bajo una curva

se definió utilizando el producto $\Delta y \Delta x$ (el área de un rectángulo). De tal modo, al menos en una etapa de aproximación primitiva, las operaciones de derivación y de integración definida parecen tener una relación inversa en el mismo sentido en el que son operaciones inversas la división y la multiplicación. El teorema fundamental del cálculo establece que los procesos de límite (utilizados para definir la derivada y la integral definida) preservan esta relación inversa. (p. 282).

Además de esto, donde se comenta que la relación inversa entre derivada e integral proviene de que las operaciones división y multiplicación son inversas, se añade una representación gráfica que ilustra cada uno de los conceptos (véase la Figura 7.7).

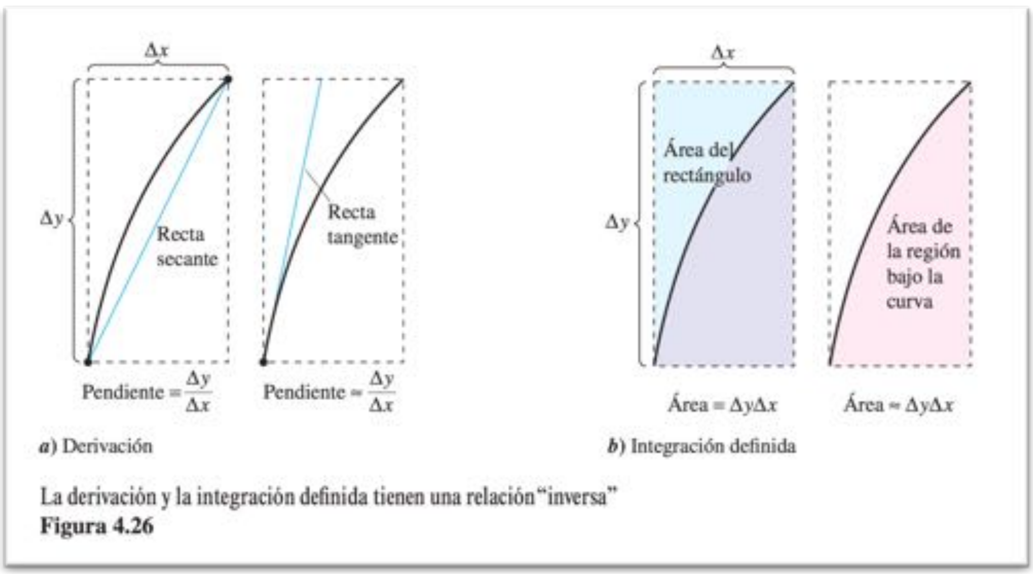


Figura 7.7. Representación de la relación entre derivada e integral definida (Larson y Edwards, 2010, p. 282)

Por otro lado, también se hace un apunte histórico sobre la procedencia del símbolo de la integral. Para ello, Larson y Edwards (2010) plantean la pregunta '¿A qué se aplicó primero el símbolo: a la antiderivación o a la integración definida?' (p. 282), sugiriendo que este símbolo proviene de la letra S.

En segundo lugar, en Larson y Edwards (2010) también se muestran varias aplicaciones de la integral definida y los teoremas fundamentales del cálculo. Uno de ellos es el desarrollo del valor medio de una función en un intervalo. A partir de esta definición se muestra un ejemplo sobre una aplicación sobre la velocidad del sonido (véase la Figura 7.8).

EJEMPLO 5 La velocidad del sonido

A diferentes alturas en la atmósfera de la Tierra, el sonido viaja a distintas velocidades. La velocidad del sonido $s(x)$ (en metros por segundo) puede modelarse mediante

$$s(x) = \begin{cases} -4x + 341, & 0 \leq x < 11.5 \\ 295, & 11.5 \leq x < 22 \\ \frac{3}{4}x + 278.5, & 22 \leq x < 32 \\ \frac{3}{2}x + 254.5, & 32 \leq x < 50 \\ -\frac{3}{2}x + 404.5, & 50 \leq x \leq 80 \end{cases}$$

donde x es la altura en kilómetros (ver la figura 4.33). ¿Cuál es la velocidad media del sonido sobre el intervalo [0, 80]?

Figura 7.8. Ejemplo sobre la velocidad del sonido (Larson y Edwards, 2010, p. 287)

8. RESUMEN Y CONCLUSIONES

En este último capítulo se realizará un resumen en el que se destacarán las diferencias significativas obtenidas en la comparación de los dos textos, así como las conclusiones que se extraen de este trabajo.

8.1. RESUMEN

En este resumen se destacarán las diferencias más significativas de la comparación realizada en términos de las tres categorías establecidas en el capítulo metodológico para analizar el contenido matemático, es decir, en términos de la estructura conceptual, de los sistemas de representación y de los sentidos y modos de uso. Antes de esto se mostrará un breve resumen de las diferencias relevantes de los aspectos generales.

8.1.1. Aspectos generales

Para comenzar, se menciona la diferencia en el modo de introducir el capítulo del cálculo integral. Larson y Edwards (2010) introduce la integral como un cálculo relacionado con la diferenciación, mientras Burgos (2007) introduce el capítulo con el problema del área, dando de esta forma sentido a la integral a través del área.

Esto puede verse reflejado en la estructura del capítulo (véase la Tabla 4.1). Larson y Edwards (2010) comienza el capítulo con las primitivas o antiderivadas mientras que Burgos muestra primero las funciones integrables Riemann. Ahora bien, cabe destacar que Larson y Edwards (2010) dedica el siguiente apartado al área antes de exponer la integral definida supliendo esta ausencia de la introducción. Sin embargo, Burgos (2007) no dedica ningún epígrafe más al área salvo el último de aplicaciones geométricas.

8.1.2. Estructura conceptual

La mayor parte de la notación y terminología empleada en ambos textos es similar, sin embargo, aparecen algunas diferencias importantes, sobre todo en la terminología empleada, que se resaltarán a continuación. Por un lado, Burgos (2007) especifica que las sumas inferiores y superiores consideradas son de Darboux, mientras que Larson y Edwards (2010) no realiza ninguna apreciación, tan solo expresa suma inferior y superior. Por otro lado, también cabe citar que Burgos (2007) expresa «integrabilidad Riemann» e «integrable según Riemann», mientras que Larson y Edwards (2010) hablan de integrabilidad o integrable a secas. Por último, se puede destacar la ausencia de términos como «región» y «rectángulo inscrito y circunscrito» en Burgos (2007), los cuales si son mencionados en Larson y Edwards (2010), aunque Burgos (2007) trabaja con estos no hace mención a dichos rectángulos.

Con respecto a los resultados, la cantidad de estos ofrecida por Burgos (2007) es mucho mayor. Uno de los hechos más destacables es cómo se trabaja con la integral definida, Larson y Edwards (2010) se centran tan solo en las funciones continuas (las cuales son integrables) pues busca orientar el texto a la aplicación a las áreas. Esto repercute en otros conceptos empleados como pueden ser máximos y mínimo (en lugar de supremos e ínfimos) o criterios de integrabilidad, los cuales carecen de sentido pues las funciones continuas son integrables. En cambio, en Burgos (2007) se muestran criterios de integrabilidad y se trabaja con funciones acotadas. Sin embargo, Larson y Edwards (2010) a pesar de trabajar solo con funciones continuas, definen la integrabilidad de una función cualquiera dando lugar a mayor confusión.

Otro punto interesante son los teoremas fundamentales del cálculo. La principal diferencia con la que nos topamos es que no coinciden los nombres de estos con sus enunciados en ambos textos y consecuentemente el orden de estos cambia, lo que repercute también en las demostraciones realizadas. Esto puede suponer un gran conflicto para el estudiante que trabaje con ambos textos, no sabiendo cual es el enunciado correcto del primer o segundo teorema fundamental del cálculo.

En cuanto a los conceptos expuestos se resaltarán ciertas diferencias en cómo son presentados estos. En primer lugar, se destaca la diferencia en la definición de integrabilidad, en Larson y Edwards (2010) se define una función integral a partir de las sumas de Riemann y en Burgos (2007) a partir de las sumas de Darboux. Aunque es cierto que en Burgos (2007), tras definir las sumas de Riemann, da otra definición de integral definida utilizando las sumas de Riemann (como se muestra en la Figura 6.7) equiparándose esta con la dada en Larson y Edwards (2010). En segundo lugar, la definición de integral indefinida es totalmente diferente entre ambos textos. En Larson y Edwards (2010) se define como sinónimo de antiderivada, mientras que Burgos (2007) (en el que se han presentado las integrales definidas anteriormente) define la integral indefinida correspondiente a un punto a de un cierto intervalo como una primitiva concreta de f, $x \mapsto \int_a^x f$.

Con respecto a los razonamientos empleados por cada texto, Burgos (2007) expone todos los resultados junto a sus demostraciones, mientras que los resultados expuestos por Larson y Edwards (2010) no siempre tienen demostración, justificando que van más allá del objetivo de dicho texto. El hecho más destacable es que, en Larson y Edwards (2010), la regla de Barrow se presenta antes que el Teorema Fundamental del Cálculo por lo que se demuestra independientemente de este, de hecho se demuestra algo más fuerte que la regla de Barrow; mientras que en Burgos (2007) se presenta después y se demuestra como consecuencia de este (véase la Figura 7.2).

Para finalizar, con respecto a las estrategias, Burgos (2007) es bastante pobre en este aspecto, es un libro más lineal y no muestra ningún tipo de estrategia para resolver problemas o integrales. En este sentido, Larson y Edwards (2010) ofrece estrategias para ayudar a resolver diferentes problemas cómo integrales mediante las reglas básicas de integración o integrales definidas empleando diferentes métodos.

8.1.3. Sistemas de representación

En ambos textos aparece tanto el sistema de representación algebraico como el gráfico. En Larson y Edwards (2010) se disponen de una gran cantidad de representaciones gráficas que ayudan a entender cada una de las definiciones, los resultados y los ejemplos. Si bien es cierto que en Burgos (2007) también se disponen gran cantidad de representaciones gráficas, la cantidad es menor comparada con Larson y Edwards (2010), pues en Burgos (2007) solo se presentan junto algunos resultados, demostraciones y ejemplos.

8.1.4. Sentidos y modos de uso

En este apartado Larson y Edwards (2010) es el único que ofrece determinadas aplicaciones y sentidos a los conceptos tratados, pues Burgos (2007) no menciona nada al respecto. Algunas de estas aplicaciones y sentidos mostradas en Larson y Edwards (2010) son los siguientes: (a) se menciona como fue descubierta la relación entre integral y derivada por Newton y Leibniz; (b) se muestran situaciones reales a través de ejemplos tales como el movimiento vertical o el movimiento de una partícula; (c) da sentido de la integral definida a través del cálculo de áreas; (d) hace referencia a un artículo que habla de la historia de la integral definida, para que el estudiante pueda obtener un origen fenomenológico histórico de dicho concepto; (e) se mencionan programas informáticos para encontrar la primitiva de manera rápida, lo cual podría servir de gran ayuda al estudiante.

8.2. Conclusiones

Para dar una valoración global, según lo analizado, podríamos decir que tipo de texto consideramos que es cada uno de ellos. Burgos (2007) es un texto lineal con rigor matemático, en el que exponen una serie de resultados junto con sus demostraciones para explicar y justificar el contenido matemático expuesto. Larson y Edwards (2010) es un texto más orientado a la aplicación de dichos conceptos en otros ámbitos y a exponer tan solo los resultados más importantes para poder usar dichas aplicaciones, no dando tanta importancia a las demostraciones; además, tiene una mayor variedad estructural, incluyendo puntos de ayuda, estrategias y gran cantidad de ejemplos.

Una vez dada esta valoración objetiva, será el lector el que deba valorar qué tipo de texto se ajusta a sus necesidades de enseñanza. Nosotros no podemos valorar si un texto es mejor que otro ni es el objetivo de dicho trabajo, tan solo pretendemos dar una ayuda para la elección de un libro a recomendar a los alumnos. Se dispone entonces a valorar si los objetivos planteados inicialmente han sido conseguidos:

- *Elegir y adaptar un método de análisis que permita extraer y comparar los contenidos relevantes de manera organizada*. El método que se ha empleado para el análisis de los textos en este trabajo es el análisis textual a través del análisis de contenido. A su vez se ha organizado los contenidos en diferentes categorías para seguir una estructura organizada en el análisis y comparación de los contenidos.
- *Señalar diferencias y semejanzas en los contenidos y en cómo se presentan en los libros de textos analizados*. En los capítulos 5, 6 y 7 se han analizados y comparados los contenidos relativos a las primitivas, la integral definida y el teorema fundamental del cálculo. En estos capítulos se han resaltados las diferencias y semejanzas de los contenidos y el modo en que estos son presentados en cada texto. Además, se ha añadido un resumen de las diferencias más significativas en el punto anterior de este capítulo.
- *Analizar y comparar la estructura y metodología empleada en los textos analizados*. En el capítulo 4 se realiza un análisis y comparación sobre la estructura y metodología de cada uno de los textos.

Con base en lo expuesto, consideramos que se han superado los tres objetivos planteados inicialmente. Por lo que estamos en condiciones de finalizar las conclusiones exponiendo las limitaciones que se han tenido, así como posibles líneas de continuación del trabajo.

Las principales limitaciones de este trabajo son la ausencia de mayor espacio y tiempo para poder analizar otros aspectos importantes como las tareas u otros contenidos relevantes como pueden ser las aplicaciones de la integral.

Por último, con base en estas limitaciones, podemos dar algunas líneas de continuación para investigaciones en las que se analicen las tareas o las aplicaciones de la integral en manuales universitarios de cálculo. También sería interesante conocer los significados personales de la integral que adquieren alumnos universitarios que usan diferentes manuales para su estudio. Añadir, por último, una línea basada en analizar y comparar la evolución de un mismo texto de cálculo a lo largo de las diferentes ediciones existentes.

Bibliografía

Aldana, E. y González, M. T. (2011). Desarrollo del esquema conceptual del concepto de integral definida en el marco teórico APOE: un estudio de caso. En G. García (Ed.), *Memorias del 12º Encuentro Colombiano de Matemática Educativa* (pp. 152-161). Armenia, Colombia: Gaia.

Apostol, T. (2001). *Calculus* (2ª edición). Barcelona, España: Reverte.

Aranda, C. y Callejo, M. L. (2015). Perfiles de estudiantes en la comprensión de la aproximación al área de una superficie bajo una curva. En C. Fernández, M. Molina y N. Planas (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XIX* (pp. 123-131). Alicante: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Bernad, J. A. (1976). *Guía para la valoración de los textos escolares*. Barcelona, España: Teide.

Bravo, A. S. y Cantoral, R. (2012). Los libros de texto de cálculo y el fenómeno de la trasposición didáctica. *Educación matemática*, *24*(2), 91-122.

Carranza, M., Cosci, A., Echevarría, G., Gatica, N., May, G. y Renaudo, J. (2006). El concepto de límite en los libros de textos universitarios. En G. Martínez (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática Educativa* (Vol. 19, pp. 570-576). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Choppin, A. (1980). L'histoire des manuels scolaires. Une approche globale. *Histoire de l'éducation*, *9*(1), 1-25.

Cohen, L., Manion, L. y Morrison, K. (2011). *Research Methods in Education* (7º edición). Londres, Reino Unido: Routledge.

Contreras, A. y Ordóñez, L. (2003). El análisis de manuales en la enseñanza de la integral definida. En E. Castro (Ed.), *Investigación en educación matemática VII* (pp. 277-288). Granada, España: SEIEM.

Contreras, Á., Ordóñez, L. y Wilhelmi, M. R. (2010). Influencia de las pruebas de acceso a la Universidad en la Enseñanza de la integral definida en el Bachillerato. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *28*(3), 367-384.

De Burgos, J. (2007). *Cálculo infinitesimal de una variable* (2ª edición). Madrid, España: McGraw-Hill.

Erbas, A. K., Alacaci, C. y Bulut, M. (2012). A Comparison of Mathematics Textbooks from Turkey, Singapore, and the United States of America. *Educational Sciences: Theory and Practice*, *12*(3), 2324-2329.

Fernández-Plaza, J. A. (2016). Análisis de contenido. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 103-118). Madrid, España: Pirámide.

Fernández-Plaza, J. A., Castro-Rodríguez, E., Estrella, M. S., Martín-Fernández, E., Rico, L., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Vílchez-Marín, M. (2016). Significado y concepciones de conceptos matemáticos escolares. En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 237-246). Málaga, España: SEIEM.

Frege, G. (1998). Sobre sentido y referencia. En L. M. Villanueva (Ed.), *Ensayos de semántica y filosofía de la lógica* (pp. 84-101). Madrid, España: Tecnos.

Glaeser, G. (1983). Epistemologie des nombres relatifs. Recherches en didactique des mathématiques. *Revue d'histoire des sciences*, *36*(3), 365-365.

Gómez, B. (2011). El Análisis de manuales y la identificación de problemas de investigación en Didáctica de las Matemáticas. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *5*(2), 49-65.

Gómez, P. (2007). *Desarrollo del conocimiento didáctico en un plan de formación inicial de profesores de matemáticas de secundaria* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

González, M. T. y Sierra, M. (2002). La enseñanza del Análisis Matemático en los libros de texto españoles de enseñanza secundaria del siglo XX. *Historia de la educación: Revista interuniversitaria*, (21), 177-198.

González, M. T. y Sierra, M. (2004). Metodología de análisis de libros de texto de matemáticas: los puntos críticos en la enseñanza secundaria en España durante el siglo XX. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *22*(3), 389-408.

González, M. T., Sierra, M. y López, C. (1999). Evolución histórica del concepto de límite funcional en los libros de texto de bachillerato y cursos de orientación universitaria (COU): 1940-1995. *Enseñanza de las ciencias: revista de investigación y experiencias didácticas*, *17*(3), 463-478.

González-Martín, A. S. y Camacho, M. (2005). Sobre la comprensión en estudiantes de matemáticas del concepto de integral impropia. *Enseñanza de las Ciencias*, *23*(1), 81-96.

González-Ruiz, I., Ruiz-Hidalgo, J. F. y Molina, M. (2014). Influencia de los conceptos topológicos en la definición de límite de una función en un punto en libros de texto de cálculo. En M. T. González, M. Codes, D. Arnau y T. Ortega (Eds.), *Investigación en educación matemática XVIII* (pp. 385-394). Salamanca, España: SEIEM.

Hernández, R., Fernández, C. y Baptista, P. (2014). *Metodología de la investigación* (6ª edición). México, DF: Mc Graw Hill.

Herrera, M. E. (2016). *Sobre la enseñanza del cálculo infinitesimal en el grado en Matemáticas: una comparativa de textos en relación con el cálculo diferencial* (Trabajo fin de máster). Universidad de Granada, España.

Herrera, M. E., Velasco, M. V. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2017). Comparando textos de cálculo: el caso de la derivada. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *11*(4), 280-306.

Hiebert, J. y Lefevre, P. (1986). Conceptual and procedural knowledge in mathematics: An Introductory Analysis. En J. Hiebert, *Conceptual and Procedural Knowledge: The Case of Mathematics* (pp. 1-27). Hillsdale, NJ: Lawrence Erlbaum Associates.

Howson, A. G. (1995). *Mathematics textbooks: a comparative study of grade 8 texts*. Vancouver, Canadá: Pacific Educational Press.

Ibánez, I. y Llombart, J. (2001). La comparación de textos en historia de la Ciencia: una propuesta metodológica. *Llull*, *24*(49), 131-148.

Kouropatov, A. y Dreyfus, T. (2013). Constructing the integral concept on the basis of the idea of accumulation: suggestion for a high school curriculum. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *44*(5), 641-651.

Larson, R. y Edwards, B. (2010). *Cálculo 1 de una variable* (9ª edición). Madrid, España: McGraw-Hill.

León, O. y Montero, I. (2003). *Métodos de Investigación en Psicología y Educación* (3ª edición). Madrid, España: McGraw-Hill.

Llorens, J. L. y Santoja, F. J. (1997). Una Interpretación de las Dificultades en el Aprendizaje del Concepto de Integral. *Divulgaciones Matemáticas*, *5*(1/2), 61-76.

Lupiáñez, J. L. (2013). Análisis Didáctico: la planificación del aprendizaje desde una perspectiva curricular. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 81-101). Granada, España: Comares.

Lupiáñez, J. L. (2016). Sistemas de representación. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 119-137). Madrid, España: Pirámide.

Machado, A. M. (2009). Investigación histórica de conceptos en los libros de matemáticas. En M. J. González, M. T. González y J. Murillo (Eds.), *Investigación en educación matemática XIII* (pp. 5-20). Santander, España: SEIEM.

Marco-Buzunáriz, M. A., Muñoz-Escolano, J. M. y Oller-Marcén, A. M. (2016). Investigación sobre libros de texto en los simposios de la SEIEM (1997-2015). En J. A. Macías, A. Jiménez, J. L. González, M. T. Sánchez, P. Hernández, C. Fernández, … A. Berciano (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XX* (pp. 325-334). Málaga, España: SEIEM.

Milevicich, L. (2008). Las ideas previas sobre el cálculo integral en los alumnos de primer año de la universidad. En P. Lestón (Ed.), *Acta Latinoamericana de Matemática*

Educativa (Vol. 21, pp. 329-338). México, DF: Comité Latinoamericano de Matemática Educativa A. C.

Ordóñez, L. y Contreras, A. (2011). La integral definida en bachillerato: restricciones institucionales de las Pruebas de Acceso a la Universidad. En M. Marín, G. Fernández, L. J. Blanco y M. M. Palarea (Eds.), *Investigación en Educación Matemática XV* (pp. 461-470). Ciudad Real: Sociedad Española de Investigación en Educación Matemática, SEIEM.

Orton, A. (1983). Students' understanding of integration. *Educational Studies in Mathematics*, *14*(1), 1-18.

Park, K. y Leung, K. S. F. (2006). A Comparative Study of the Mathematics Textbooks of China, England, Japan, Korea, and the United States. En K. S. F. Leung, K. D. Graf y F. J. Lopez-Real (Eds.), *Mathematics Education in Different Cultural Traditions-A Comparative Study of East Asia and the West* (Vol. 9, pp. 227-238). Boston, MA: Springer.

Puig, L. (1997). Análisis fenomenológico. En L. Rico (Ed.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 61-94). Barcelona, España: Horsori.

Radford, L. (1998). On signs and representations. A cultural account. *Scientia Pedagogica Experimentalis*, *35*(1), 277-302.

Rasslan, S. y Tall, D. (2002). Definitions and images for the definite integral concept. En A. D. Cockburn y E. Nardi (Eds.), *Proceedings of the 26 th Conference PME* (Vol. 4, pp. 89-96). Norwich.

Rico, L. (1997). Consideraciones sobre el currículo de matemáticas para educación secundaria. En L. Rico, E. Castro, E. Castro, M. Coriat, A. Marín, L. Puig, M. Sierra y M. M. Socas (Eds.), *La educación matemática en la enseñanza secundaria* (pp. 15-38). Barcelona, España: Horsori.

Rico, L. (2009). Sobre las nociones de representación y comprensión en la investigación en educación matemática. *PNA. Revista de Investigación en Didáctica de la Matemática*, *4*(1), 1-14.

Rico, L. (2012). Aproximación a la investigación en Didáctica de la matemática. *Avances de Investigación en Educación Matemática*, (1), 39-63.

Rico, L. (2013). El Método del Análisis Didáctico. *Unión*, (33), 11-27.

Rico, L. (2016). Matemáticas y análisis didáctico. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 84-100). Madrid, España: Pirámide.

Rico, L. y Fernández-Cano, A. (2013). Análisis didáctico y metodología de investigación. En L. Rico, J. L. Lupiáñez y M. Molina (Eds.), *Análisis Didáctico en Educación Matemática: metodología de investigación, formación de profesores e innovación curricular* (pp. 1-22). Granada, España: Comares.

Rico, L., Flores, P. y Ruiz-Hidalgo, J. F. (2015). Enseñanza de las matemáticas con sentido. *UNO. Didáctica de las Matemáticas*, (70), 48-54.

Ruiz-Hidalgo, J. F. (2016). Sentidos y modos de uso de un concepto. En L. Rico y A. Moreno (Eds.), *Elementos de didáctica de la matemática para el profesor de secundaria* (pp. 139-151). Madrid, España: Pirámide.

Sánchez, C. y Contreras, A. (1998). Análisis de manuales a través del tratamiento didáctico dado al concepto de límite de una función: una perspectiva desde la noción de obstáculo. *Enseñanza de las Ciencias*, *16*(1), 73-84.

Santos, E. C. dos. (2012). *Idoneidad de procesos de estudio del cálculo integral en la formación de profesores de matemáticas: una aproximación desde la investigación en didáctica del cálculo y el conocimiento profesional* (Tesis doctoral). Universidad de Granada, España.

Schubring, G. (1987). On the Methodology of Analysing Historical Textbooks: Lacroix as Textbook Author. *For the Learning of Mathematics*, *7*(3), 41-51.

Sierra, M., González, M. T. y López, C. (2003). El concepto de continuidad en los manuales españoles de enseñanza secundaria de la segunda mitad del siglo XX. *Educación matemática*, *15*(1), 21-50.

Sierra, M., Rico, L. y Gómez, B. (1997). El número y la forma: libros e impresos para la enseñanza del cálculo y la geometría. En A. Escolano (Ed.), *Historia ilustrada del libro escolar en España: del Antiguo Régimen a la Segunda República* (Vol. 2, pp. 373-398). Madrid, España: Fundación Germán Sánchez Ruipérez.

Souto, B. y Gómez-Chacón, I. (2011). Visualization at University Level: The Concept of Integral. *Annales de Didactique et de Sciences Cognitives*, *16*, 217-246.

Spivak, M. (2012). *Calculus* (3ª edición). Barcelona, España: Reverte.

Turégano, P. (1997). El aprendizaje del concepto de integral. *Suma: Revista sobre Enseñanza y Aprendizaje de las Matemáticas*, (26), 39-52.

Anexo I. Otros aspectos en la comparación sobre el tratamiento del Teorema Fundamental del Cálculo

En este anexo se muestran los aspectos relativos a la estructura conceptual que no han tenido cabida en el trabajo por cuestiones de espacio.

1. Términos/Notaciones

En este apartado tan solo se añadirá aquellos términos y notaciones que no se han mencionado en los capítulos 5 y 6 del trabajo o aquellos que habiéndose mencionado tenga especial relevancia en dicha sección.

En primer lugar, se menciona los términos que se usan en cada texto para el Teorema Fundamental del Cálculo mediante la Tabla I.1:

Tabla I.1

Terminología empleada para el TFC en cada texto analizado

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
• Teorema fundamental del cálculo • Derivación • Integración • Antiderivada o primitiva • Constante de integración • Integral definida • Valor medio de una función	• Primer Teorema Fundamental del Cálculo • Derivación • Integración • Integral indefinida • Primitiva o antiderivada • Regla de Barrow

Tabla I.1

Terminología empleada para el TFC en cada texto analizado

• Función acumulación	• Segundo Teorema Fundamental del Cálculo
• Cambio neto	• Función integrable
• Segundo teorema fundamental del cálculo	

No se aprecian diferencias muy significativas en los términos que se encuentran en cada texto. Las diferencias se sitúan en ausencia de ciertos términos en un texto con respecto del otro.

Siguiendo esto, por un lado, se puede mencionar que en Burgos (2007) se usa el término de «integral indefinida» para enunciar los teoremas fundamentales del cálculo, mientras que en Larson y Edwards (2010) no se hace mención de dicho término en ningún momento. Al igual ocurre con la «regla de Barrow», Burgos (2007) la enuncia y la nombra como tal, Larson y Edwards (2010) no la nombra como tal aunque sí se enuncia aunque la nombra como «Teorema Fundamental del Cálculo».

Por otro lado, en Larson y Edwards (2010) se emplean términos como «área» e «integral definida» que se ausentan en se Burgos (2007), por lo que Larson y Edwards (2010) vuelven a relacionar estos resultados enunciados para calcular áreas mientras que Burgos (2007) no lo hace. Además, en Larson y Edwards (2010) se emplean otros términos como «valor medio de una función», «función acumulación» y «cambio neto» que no se utilizan en Burgos (2007), y que servirán para dar aplicaciones.

En segundo lugar, se muestra una tabla con las notaciones usadas para el Teorema Fundamental del Cálculo en ambos textos:

Tabla I.2

Notación empleada para el TFC en cada texto analizado

Larson y Edwards (2010)	Burgos (2007)
$\int_a^b f(x)dx = F(x)]_a^b = F(b) - F(a)$	$\int_a^b f(x)dx = G(b) - G(a) = [G(x)]_{x=a}^{x=b}$
$\frac{d}{dx}\left[\int_a^x f(t)dt\right] = f(x)$	$D\left[\int_a^x f\right] = f(x)$

Como puede comprobarse en la Tabla I.2, tan sólo hay dos nuevas notaciones en esta sección que derivan de los resultados de cada uno de los dos teoremas fundamentales del cálculo. Por lo que tan solo se comentarán las diferencias que pueden apreciarse en estas.

Por un lado, se trata la notación que nos permite hallar una integral definida. Se puede observar que se hace uso de una primitiva que en Larson y Edwards (2010) se denota con una $F(x)$, mientras que en Burgos (2007) se denota por $G(x)$. La otra diferencia es que en Larson y Edwards (2010) se denota $F(b) - F(a)$ como $F(x)]_a^b$, mientras que en Burgos (2007) se denota por $[G(x)]_{x=a}^{x=b}$, especificando de esta manera que la variable x hay que sustituirla por b y a.

Por otro lado, se analiza la notación usada en la derivada de la integral indefinida. En este sentido, cabe destacar que al tener la variable x en el límite superior de integración, en Larson y Edwards (2010) se emplea la variable t para la función del integrando así como el diferencial, dt. En Burgos (2007) no se emplea ninguna variable en el integrando evitando así el empleo de otra variable. La otra diferencia que se encuentra es la notación empleada para escribir la derivada, en Larson y Edwards (2010) se usa $\frac{d}{dx}[\cdot]$,mientras que en Burgos (2007) se emplea $D[\cdot]$.

2. Conceptos

Los conceptos en esta sección de ambos textos no tienen especial relevancia. A pesar de ser una sección dedicada al Teorema Fundamental del Cálculo, en Larson y Edwards (2010) se expone una definición del valor medio de una función en un intervalo, obtenida a partir del teorema del valor medio de la integral (véase la Figura I.1). En cambio, en Burgos (2007) no se realiza ninguna definición.

DEFINICIÓN DEL VALOR MEDIO DE UNA FUNCIÓN EN UN INTERVALO

Si f es integrable en el intervalo cerrado $[a, b]$, entonces el **valor medio** de f en el intervalo es

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx.$$

Figura I.1. Definición del valor medio de una función en un intervalo (Larson y Edwards, 2010, p. 286)

3. Estrategias

Con respecto a las estrategias, Larson y Edwards (2010) expone una estrategia para usar la regla de Barrow (lo que nombra como Teorema Fundamental del Cálculo) (véase la Figura I.2). En primer lugar, se precisa que se conozca una primitiva; en segundo lugar, se aplica la regla de Barrow usando una notación especifica ya mencionada anteriormente; y, por último, se señala que no es necesario usar una constante de integración.

Estrategia para utilizar el teorema fundamental del cálculo

1. *Suponiendo que se conozca* una antiderivada o primitiva f, se dispone de una forma de calcular una integral definida sin tener que utilizar el límite de la suma.
2. Cuando se aplica el teorema fundamental del cálculo, la siguiente notación resulta conveniente.

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(x)\Big]_a^b$$
$$= F(b) - F(a)$$

Por ejemplo, para calcular $\int_1^3 x^3\,dx$, es posible escribir

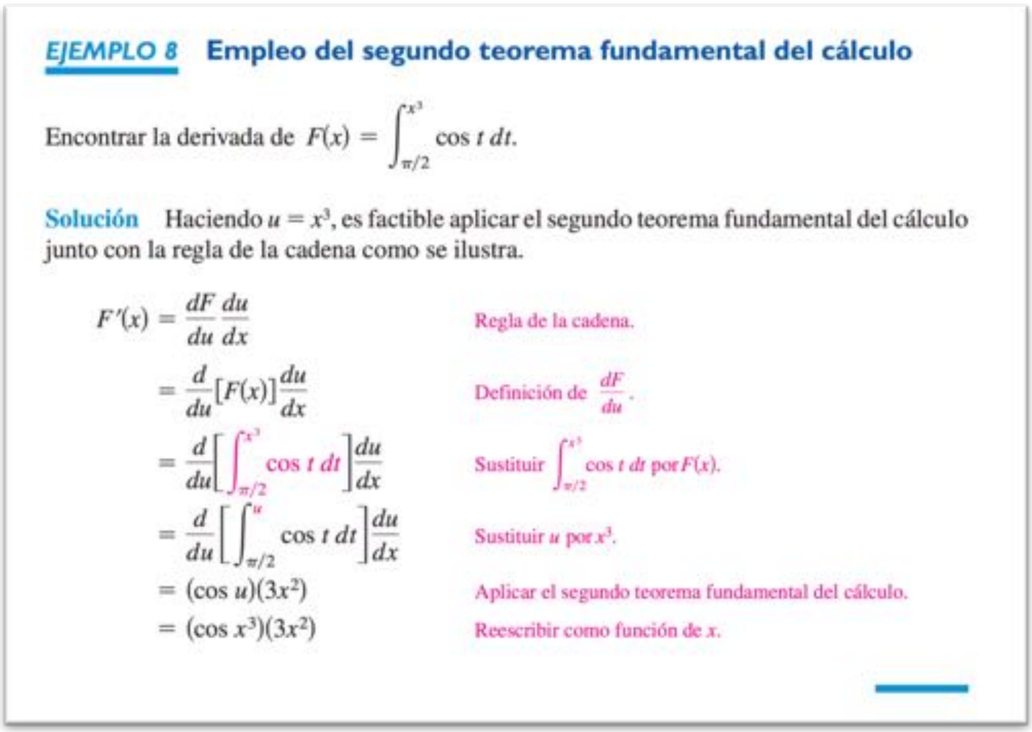
$$\int_1^3 x^3\,dx = \frac{x^4}{4}\Big]_1^3 = \frac{3^4}{4} - \frac{1^4}{4} = \frac{81}{4} - \frac{1}{4} = 20.$$

3. No es necesario incluir una constante de integración C en la antiderivada o primitiva ya que

$$\int_a^b f(x)\,dx = \Big[F(x) + C\Big]_a^b$$
$$= [F(b) + C] - [F(a) + C]$$
$$= F(b) - F(a).$$

Figura I.2. Estrategia para utilizar la regla de Barrow (Larson y Edwards, 2010, p. 283)

Además, se emplea un ejemplo concreto sobre el cálculo de áreas realizando y señalando cada uno de los pasos. Otra estrategia que se expone en Larson y Edwards (2010) es sobre cómo aplicar el primer Teorema Fundamental del Cálculo (lo que nombra como segundo Teorema Fundamental del Cálculo) junto con la regla de la cadena. Esta estrategia se expone a través de un ejemplo indicando los pasos a realizar en un lateral en color rojo (véase la Figura I.3).



EJEMPLO 8 **Empleo del segundo teorema fundamental del cálculo**

Encontrar la derivada de $F(x) = \int_{\pi/2}^{x^3} \cos t\, dt$.

Solución Haciendo $u = x^3$, es factible aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo junto con la regla de la cadena como se ilustra.

$F'(x) = \frac{dF}{du}\frac{du}{dx}$	Regla de la cadena.
$= \frac{d}{du}[F(x)]\frac{du}{dx}$	Definición de $\frac{dF}{du}$.
$= \frac{d}{du}\left[\int_{\pi/2}^{x^3} \cos t\, dt\right]\frac{du}{dx}$	Sustituir $\int_{\pi/2}^{x^3} \cos t\, dt$ por $F(x)$.
$= \frac{d}{du}\left[\int_{\pi/2}^{u} \cos t\, dt\right]\frac{du}{dx}$	Sustituir u por x^3.
$= (\cos u)(3x^2)$	Aplicar el segundo teorema fundamental del cálculo.
$= (\cos x^3)(3x^2)$	Reescribir como función de x.

Figura I.3. Empleo del primer Teorema Fundamental del Cálculo (Larson y Edwards, 2010, p. 290)

En este aspecto, Burgos (2007) es un texto más pobre, no muestra ningún tipo de estrategia que ayude a aplicar los teoremas fundamentales del cálculo y en los ejemplos expuestos no se realizan muchas explicaciones del proceso de resolución de los mismos.